FACULTAD DE CIENCIAS

Categorías abelianas

(Abelian categories)

TRABAJO DE FIN DE GRADO
PARA ACCEDER AL

Grado en Matemáticas

Autor: Ángel Ríos San Nicolás

Director: Luis Felipe Tabera Alonso

Octubre - 2019

Resumen

El teorema de Mitchell afirma esencialmente que toda categoría abeliana se puede ver como una categoría de módulos. El objetivo principal de este trabajo es demostrar una versión débil de este teorema. Comenzamos introduciendo las nociones fundamentales de teoría de categorías: categoría, funtor y transformación natural. Estudiamos las categorías abelianas y construimos explícitamente la estructura de grupo abeliano en los conjuntos de morfismos que las caracteriza. La demostración del teorema débil se basa en la aplicación del funtor Hom definido por un objeto proyectivo y generador.

Palabras clave: teoría de categorías, categorías abelianas, teorema de Mitchell

Abstract

Mitchell's Theorem essentially states that every abelian category can be seen as a category of modules. The main objective of this project is to prove a weak version of this theorem. We start introducing fundamental notions of Category Theory: category, functor and natural transformation. We study abelian categories and we explicitly construct the abelian group structure in the sets of morphisms that characterizes these categories. The proof of the weak theorem is based on the application of the Hom functor given an object which is both projective and generator.

Key words: Category Theory, abelian categories, Mitchell's Theorem

Índice general

Introducción **1**

1. Introducción a la teoría de categorías **3**
1.1. Categorías y funtores 3
1.2. Tipos de objetos y morfismos 13
1.3. Construcciones universales 16
1.4. Normalidad 22

2. Categorías abelianas **25**
2.1. Definición y propiedades 25
2.2. Estructura aditiva 29

3. Teorema débil de Mitchell y categorías de funtores **33**
3.1. Funtores exactos 33
3.2. Objetos proyectivos y generadores 36
3.3. Teorema débil de Mitchell 40

Bibliografía **49**

Introducción

La teoría de categorías fue introducida en 1945 por Samuel Eilenberg y Saunders Mac Lane en su artículo conjunto *General Theory of Natural Equivalences* [4] con el objetivo de formalizar matemáticamente los conceptos que hoy se conocen como funtor y transformación natural. Los elementos que componen una categoría son objetos sin un significado matemático detrás y una colección de "flechas", llamadas morfismos, que pretenden capturar la idea de transformación o relación entre objetos. Ejemplos de categorías son: los conjuntos con las aplicaciones, los módulos con los homomorfismos de módulos o los espacios topológicos con las aplicaciones continuas. El resultado es una teoría muy abstracta, tanto que era conocida como "general abstract nonsense" incluso por sus cofundadores (ver [7]). La teoría de categorías centra su atención en la relación que tiene un objeto con todos los demás de la categoría en lugar de en el propio objeto. Por ejemplo, en la categoría de espacios vectoriales sobre un cuerpo, el espacio vectorial $\mathbf{0}$ se puede caracterizar por ser el único objeto (salvo isomorfismo) tal que, para cualquier otro objeto V, existe una única aplicación lineal $\mathbf{0} \longrightarrow V$.

Una de las herramientas más potentes de la teoría de categorías es el concepto de funtor, que estudia cómo se relacionan unas categorías con otras. Conocemos varios ejemplos de funtores, como el primer grupo fundamental, que a cada espacio topológico le asocia un grupo en un punto y a cada aplicación continua le asocia un morfismo de grupos. Esto permite aplicar técnicas de teoría de grupos para estudiar, por ejemplo, si dos espacios topológicos son homeomorfos. Otro ejemplo de funtor es el que asocia a cada variedad diferenciable su espacio tangente en un punto y a cada aplicación diferenciable la correspondiente aplicación diferencial, que es una aplicación lineal entre los espacios tangentes.

El primer objetivo de este trabajo es introducir nociones elementales como categoría, morfismo, funtor o transformación natural y ver cómo abstrae el lenguaje y conceptos conocidos de diferentes ramas. Una vez vistas estas nociones, nos centramos en las categorías abelianas, que son un tipo concreto de categoría.

Henri Cartan y S. Eilenberg logran en su trabajo clásico [3] unificar las diferentes teorías de homología y cohomología que se venían estudiando desde finales del siglo XIX y establecen el álgebra homológica como una rama independiente de las matemáticas. A partir de [3], David Buchsbaum se da cuenta de que muchos de los resultados sobre diagramas de módulos se pueden probar también en un contexto más general y es él quien trata por primera vez las categorías exactas, que son el precedente de las categorías abelianas. Así, Buchsbaum prueba en [2] muchos resultados sobre categorías abelianas.

Posteriormente, Alexander Grothendieck, en su artículo [6], conocido como su *Tohoku paper*, reescribe los fundamentos del álgebra homológica en el lenguaje de las categorías abelianas. En la actualidad, las categorías abelianas siguen siendo fundamentales en álgebra homológica y, como consecuencia, se aplican en muchas áreas como álgebra conmutativa, geometría algebraica y topología algebraica. Existen numerosas definiciones equivalentes de categoría abeliana en la bibliografía. La mayoría de ellas exige que los conjuntos de morfismos tengan una estructura de grupo como [9]. Sin embargo, introducimos la teoría basándonos en [5], donde se construye esta estructura de grupo a partir de una definición, a simple vista, más sencilla.

Para entender mejor en qué sentido las categorías abelianas generalizan resultados de la teoría de módulos, Barry Mitchell demostró el que hoy conocemos como teorema de Mitchell o teorema del embebimiento de Freyd-Mitchell cuya consecuencia principal es que ciertos teoremas sobre diagramas son ciertos en las categorías abelianas por ser ciertos en las categorías de módulos. El teorema permite así razonar en los diagramas finitos en una categoría abeliana como si fueran diagramas de módulos. De esta manera, se tiene un resultado metamatemático que permite transferir los teoremas de una teoría a la otra.

> **Teorema de Mitchell**. Para toda categoría abeliana pequeña $\mathscr{C}$, existe un anillo R no necesariamente conmutativo y un funtor covariante $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathbf{Mod}_R$ plenamente fiel y exacto.

En este trabajo no seremos tan ambiciosos por falta de espacio y porque deberíamos introducir muchos conceptos como cogenerador inyectivo, categoría de Grothendieck o extensión esencial. Veremos una versión débil que es, además, un resultado previo en una de las demostraciones del teorema de Mitchell.

> **Teorema débil de Mitchell**. Sea $\mathscr{C}$ una categoría abeliana con un generador proyectivo y coproductos pequeños. Para toda subcategoría plena pequeña y exacta $\mathscr{D}$, existe un anillo R, no necesariamente conmutativo, y un funtor covariante $F : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbf{Mod}_R$ plenamente fiel y exacto.

Una de las tareas principales será definir todos los conceptos necesarios para entender los enunciados de ambos teoremas, demostrar el segundo y comprobar que es, efectivamente, más débil que el primero. También justificaremos las consecuencias metamatemáticas de estos teoremas y veremos un ejemplo en el lema de la serpiente que es uno de los resultados clásicos más relevantes del álgebra homológica.

En el Capítulo 1 introducimos las nociones elementales de la teoría de categorías como categoría, funtor o transformación natural. También explicamos el principio de dualidad categórica que aplicamos durante todo el trabajo y que es especialmente importante en las categorías abelianas. Además, introducimos los diferentes tipos elementales de morfismos (retracción, monomorfismo, isomorfismo, morfismo cero...), objetos (objeto inicial, final y cero) y construcciones universales (producto, intersección, núcleo...). Durante todo el capítulo, ponemos ejemplos que hemos construido, especialmente en el contexto de la teoría de módulos, que usaremos para probar que la categoría de módulos es abeliana.

En el Capítulo 2 definimos la noción de categoría abeliana y vemos que, efectivamente, algunos de los teoremas de módulos se reproducen en esta teoría. Entre las propiedades que estudiaremos estará la existencia y unicidad de la estructura de grupo en el conjunto de morfismos entre dos objetos.

En el Capítulo 3 estudiamos los objetos proyectivos y generadores que nos permiten definir funtores exactos y fieles. Con ello demostramos el teorema débil. Además, construimos, a la Yoneda, un funtor contravariante plenamente fiel de una categoría abeliana cualquiera en una categoría abeliana de funtores con un generador que es uno de los pasos de la demostración del teorema de Mitchell.

Para las primeras secciones del primer capítulo, nos hemos basado principalmente en [11]. Para el resto del trabajo, hemos seguido [5] completando, detallando y añadiendo demostraciones, algunas, en parte, inspiradas en [9].

Capítulo 1

Introducción a la teoría de categorías

Comenzamos introduciendo los conceptos fundamentales de categoría, funtor y transformación natural. Con ellos enunciamos y probamos el lema de Yoneda que es de los primeros resultados no triviales que se prueban en teoría de categorías y que vamos a necesitar más adelante cuando veamos categorías de funtores. Además, iremos introduciendo las nociones necesarias para definir las categorías abelianas y pondremos como ejemplo principal las categorías de módulos. Con esto probaremos que son abelianas.

1.1. Categorías y funtores

Cuando definimos una cierta estructura como los grupos en álgebra, los espacios topológicos en topología o las a variedades diferenciables en geometría diferencial siempre se estudian distintos tipos de transformaciones admisibles entre los objetos como los homomorfismos de grupos, las aplicaciones continuas o las aplicaciones diferenciables. La noción de categoría abstrae y generaliza todos estos conceptos.

Definición 1.1.1. Una **categoría** $\mathscr{C}$ consiste en:

- Una clase $|\mathscr{C}|$ cuyos elementos llamamos **objetos** de la categoría.
- Una familia de conjuntos $\{\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)\}_{A,B\in|\mathscr{C}|}$ disjuntos dos a dos.
  Si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$ con A, B objetos, decimos que f es un **morfismo** con **dominio** A y **codominio** B y lo denotamos $f : A \longrightarrow B$.
- Una familia de aplicaciones

  $$\{\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,C), (f,g) \longmapsto gf\}_{A,B,C\in|\mathscr{C}|}$$

  llamadas **composiciones** que satisfacen
  Asociatividad. Para todos A, B, C, D objetos y todos $f : A \longrightarrow B, g : B \longrightarrow C, h : C \longrightarrow D$ morfismos se cumple

  $$h(gf) = (hg)f.$$

  Denotamos el morfismo composición simplemente como $hgf : A \longrightarrow D$.
  Morfismo identidad. Para todo objeto A existe un morfismo $1_A : A \longrightarrow A$ llamado **identidad** en A tal que para todos B, C objetos y $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow A$ se cumplen $f1_A = f$ y $1_B g = g$.

Notamos que es necesario definir la colección de objetos como una clase y no como un conjunto ya que, de lo contrario, ni siquiera podríamos hablar de la categoría de conjuntos. Esto requiere trabajar con una teoría axiomática que permita definir clases. No entraremos en detalles sobre la diferencia de conjuntos y clases propias porque no es uno de los objetivos del trabajo, pero lo tendremos en cuenta como en el Apartado 4 del Ejemplo 1.1.6.

Probamos el primer resultado. Como era de esperar, los morfismos identidad son únicos.

Proposición 1.1.2. *Dado un objeto A en una categoría, el morfismo identidad 1_A es único.*

Demostración. Si $1_A, 1'_A : A \longrightarrow A$ son dos morfismos identidad, entonces se tiene por definición que

$$1_A = 1_A 1'_A = 1'_A.$$

□

Damos ahora una serie de ejemplos de objetos matemáticos que se pueden realizar como categorías.

Ejemplo 1.1.3.

1. **El conjunto vacío**
   El vacío es una categoría cuya clase de objetos es el conjunto vacío.
   A partir de ahora suponemos que las categorías no son vacías.

2. **Clase no vacía**
   Dada una clase no vacía, podemos considerar la categoría cuyos objetos son los elementos de la clase y que cada objeto solo tiene un morfismo de él en si mismo, necesariamente el morfismo identidad.
   En particular, los conjuntos se pueden ver como categorías.
   Recíprocamente, una categoría que solo tiene morfismos identidad determina una clase.

3. **Conjunto parcialmente ordenado**
   Un conjunto parcialmente ordenado $(X, \leq)$ se puede ver como la categoría $\mathscr{X}$ cuyos objetos son los elementos de X y dados dos objetos $x, y \in X$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{X}}(x,y) = \left\{ \begin{array}{ccc} (x,y) & \text{si} & x \leq y \\ \varnothing & \text{si} & x \not\leq y \end{array} \right. .$$

   Si $x, y, z \in X$ son tales que $x \leq y$ e $y \leq z$, se cumple, por transitividad, que $x \leq z$ y la composición de los únicos morfismos dados por $x \leq y$ e $y \leq z$ es el único morfismo dado por $x \leq z$.
   Si $x \in X$, por la propiedad reflexiva $x \leq x$ y el morfismo asociado es la identidad en x.

4. **Monoide**
   Dado un monoide $(G, \cdot)$, definimos una categoría $\mathscr{C}$ con un solo objeto A y para cada $g \in G$ un morfismo $\overline{g} : A \longrightarrow A$. Si $g, h \in G$, $g \cdot h \in G$ y definimos la composición gh como el morfismo determinado por $g \cdot h$.

Ejemplo 1.1.4. Categorías de conjuntos con estructura junto con las aplicaciones que preservan la estructura. En estos ejemplos describimos solo los objetos que serán siempre conjuntos y los morfismos que serán siempre aplicaciones. La composición es la composición como aplicaciones con lo que morfismos identidad son las aplicaciones identidad.

1. **La categoría de conjuntos Set**
   Los objetos son los conjuntos. Los morfismos son las aplicaciones entre conjuntos. La composición de morfismos es la composición usual de aplicaciones. Si $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ son aplicaciones entre conjuntos, definimos $gf : A \longrightarrow C$ como $gf = g \circ f$. Sabemos que la composición de aplicaciones está bien definida y es asociativa.

2. **La categoría de anillos Ring**
   Los objetos son los anillos asociativos con unidad no necesariamente conmutativos y los morfismos son los homomorfismos unitarios de anillos.
   Si consideramos como objetos solo los anillos conmutativos, tenemos la categoría **CRing**.

3. **La categoría de R-módulos ${}_R\mathbf{Mod}$**
   Fijado un anillo R, la categoría ${}_R\mathbf{Mod}$ tiene como objetos los R-módulos izquierdos y como morfismos los homomorfismos de R-módulos. Si $R = \mathbb{K}$ es un cuerpo, obtenemos la categoría $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ de los $\mathbb{K}$-espacios vectoriales con las aplicaciones lineales. Si $R = \mathbb{Z}$, obtenemos la categoría **Ab** de grupos abelianos con los morfismos de grupos. Análogamente se construye la categoría $\mathbf{Mod}_R$ de los R-módulos derechos.

4. **La categoría de espacios topológicos Top**
   Los objetos son los espacios topológicos y los morfismos son las aplicaciones continuas.

5. **La categoría de espacios topológicos punteados $\mathbf{Top}^*$**
   Los objetos son los espacios topológicos con un punto distinguido, es decir, las ternas (X, τ, x_0) donde (X, τ) es un espacio topológico y $x_0 \in X$. Los morfismos son las aplicaciones continuas que transforman el primer elemento distinguido en el segundo.

6. **La categoría de variedades diferenciables $\mathcal{M}$**
   Los objetos son las variedades diferenciables de clase $\mathcal{C}^\infty$ y los morfismos son las aplicaciones diferenciables de clase $\mathcal{C}^\infty$.

Si pretendemos estudiar las categorías como objetos de una categoría, necesitamos morfismos entre categorías. Estos morfismos son los funtores.

Definición 1.1.5. Un **funtor covariante** $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ de la categoría $\mathscr{C}$ en la categoría $\mathscr{D}$ consiste en:

- Una aplicación entre las clases de objetos
$$\begin{array}{rccc} F: & |\mathscr{C}| & \longrightarrow & |\mathscr{D}| \\ & A & \longmapsto & F(A) \end{array}.$$
- Para cada $A, B \in \mathscr{C}$, una aplicación entre los conjuntos de morfismos
$$\begin{array}{ccc} F : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(A), F(B)) \\ f : A \longrightarrow B & \longmapsto & F(f) : F(A) \longrightarrow F(B) \end{array}$$
  tal que cumple
  - $F(1_A) = 1_{F(A)}$ para todo $A \in |\mathscr{C}|$.
  - $F(fg) = F(f)F(g)$ para todos $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, C)$ y $A, B, C \in |\mathscr{C}|$.

Un **funtor contravariante** $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ de la categoría $\mathscr{C}$ en la categoría $\mathscr{D}$ consiste en:

- Una aplicación entre las clases de objetos
$$\begin{array}{ccc} F : |\mathscr{C}| & \longrightarrow & |\mathscr{D}| \\ A & \longmapsto & F(A) \end{array}.$$
- Para cada $A, B \in \mathscr{C}$, una aplicación entre los conjuntos de morfismos
$$\begin{array}{ccc} F : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(B), F(A)) \\ f : A \longrightarrow B & \longmapsto & F(f) : F(B) \longrightarrow F(A) \end{array}$$
  tal que cumple

- $F(1_A) = 1_{F(A)}$ para todo $A \in |\mathscr{C}|$.
- $F(fg) = F(g)F(f)$ para todos $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,C)$ y $A,B,C \in |\mathscr{C}|$.

Los funtores covariantes son los que preservan el sentido de los morfismos y el orden de la composición mientras que los funtores contravariantes son los que los invierten.

Ejemplo 1.1.6.

1. **Funtor identidad**
   Dada una categoría $\mathscr{C}$, definimos $1_{\mathscr{C}} : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ que manda cada objeto y cada morfismo en sí mismos. $1_{\mathscr{C}}(A) = A$ para todo A objeto de $\mathscr{C}$ y si $f : A \longrightarrow B$ es un morfismo en $\mathscr{C}$, $1_{\mathscr{C}}(f) = f$. Claramente, $1_{\mathscr{C}}$ es un funtor covariante.

2. **Funtor constante**
   Dada una categoría $\mathscr{C}$ y un objeto $A \in |\mathscr{C}|$, definimos $C_A : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ tal que manda cada objeto en A y cada morfismo en la identidad 1_A. F es un funtor covariante y contravariante.

3. **Funtores olvido**
   En el Ejemplo 1.1.4 tenemos una colección de categorías de conjuntos con una cierta estructura adicional donde los morfismos son tipos especiales de aplicaciones entre conjuntos. La composición de morfismos es la composición como aplicaciones. Si para una categoría de este tipo transformamos cada objeto en su conjunto subyacente y cada morfismo en su aplicación subyacente, obtenemos un funtor a **Set** que se conoce como **funtor olvido** ya que, en cierto sentido, olvida toda la estructura adicional. Por ejemplo, tenemos los funtores olvido

   $$\mathbf{Group} \longrightarrow \mathbf{Set} \qquad \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Set} \qquad {}_R\mathbf{Mod} \longrightarrow \mathbf{Set}.$$

   Si en lugar de olvidar completamente la estructura se olvida parte de ella, tenemos también **funtores olvido** como

   $$\mathbf{Ab} \longrightarrow \mathbf{Group} \qquad {}_R\mathbf{Mod} \longrightarrow \mathbf{Ab} \qquad \mathbf{Ring} \longrightarrow \mathbf{Ab}.$$

4. **Grupo de las unidades $-^* : \mathbf{Ring} \longrightarrow \mathbf{Group}$**
   El funtor $-^*$ transforma cada anillo en su grupo de unidades R^* y cada morfismo de anillos $f : R \longrightarrow S$ en el morfismo de grupos

   $$\begin{array}{rccc} f^* : & R^* & \longrightarrow & S^* \\ & r & \longmapsto & f(r) \end{array}.$$

   Se prueba fácilmente que es un funtor covariante.

5. **Grupo general lineal $\mathrm{GL}_n(-) : \mathbf{Ring} \longrightarrow \mathbf{Group}$**
   El funtor covariante $\mathrm{GL}_n(-)$ asocia a cada anillo R el grupo general lineal

   $$\mathrm{GL}_n(R) = \{M \in \mathscr{M}_n(R) : \det(M) \in R^*\}$$

   como subgrupo de $(\mathscr{M}_n(R), \cdot)$, el grupo multiplicativo de las matrices cuadradas de orden n, y a cada morfismo de anillos $f : R \longrightarrow S$ el morfismo de grupos

   $$\begin{array}{rccc} GL_n(f) : & GL_n & \longrightarrow & GL_n(S) \\ & (a_{ij})_{ij} & \longmapsto & (f(a_{ij}))_{ij} \end{array}.$$

   Se prueba fácilmente que es un funtor covariante.

6. **Grupo fundamental** $\pi_1 : \mathbf{Top}^* \longrightarrow \mathbf{Group}$
Este ejemplo es conocido. Si (X, τ, x_0) es un espacio topológico con un punto distinguido $x_0 \in X$, sabemos que la concatenación de lazos induce una estructura de grupo en el conjunto de clases de equivalencia por homotopía de lazos de base x_0, el grupo fundamental o primer grupo de homotopía $\pi_1(X, \tau, x0)$. Además, para cada morfismo en $\mathbf{Top}^*$, tenemos un morfismo de grupos entre los grupos fundamentales correspondientes.
Sabemos que esta construcción es funtorial.

7. **Funtores** $\mathrm{Hom}(A, -)$ **y** $\mathrm{Hom}(-, A)$
Sea A un objeto de una categoría $\mathscr{C}$. Tenemos dos funtores muy importantes a la categoría de conjuntos.
Definimos el **funtor Hom covariante** $\mathrm{Hom}\,(A, -) : \mathscr{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$ que transforma cada objeto B en el conjunto $\mathrm{Hom}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ y cada morfismo $f : B \longrightarrow C$ en la aplicación $\mathrm{Hom}(A, f) = \mathrm{h}^A(f)$ siguiente definida componiendo f a derecha diagramáticamente

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{h}^A(f): & \mathrm{Hom}(A,B) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(A,C) \\ & \alpha : A \longrightarrow B & \longmapsto & f\alpha : A \longrightarrow C \end{array}.$$

Veamos que $\mathrm{Hom}(A, -)$ es un funtor covariante. Si B es un objeto de $\mathscr{C}$ y $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$, se tiene que $\mathrm{h}^A(1_B)(f) = 1_B f = f$. Por tanto, $\mathrm{h}^A(1_B)$ es, efectivamente, la aplicación identidad en $\mathrm{Hom}(A, B)$. Y si $f : B \longrightarrow C$, $g : C \longrightarrow D$ y $h : A \longrightarrow B$, entonces

$$\mathrm{h}^A(fg)(h) = (fg)h = f(gh) = \mathrm{h}^A(f)\left(\mathrm{h}^A(g)(h)\right).$$

Por tanto, $\mathrm{h}^A(fg) = \mathrm{h}^A(f)\mathrm{h}^A(g)$ como queríamos probar.
Análogamente, definimos el **funtor Hom contravariante** $\mathrm{Hom}(-, A) : \mathscr{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$ que transforma cada objeto B en el conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, A)$ y cada morfismo $f : B \longrightarrow C$ en la aplicación definida componiendo f a izquierda diagramáticamente, $\mathrm{h}_A(f)(h) = hf : B \longrightarrow A$ para todo $h : C \longrightarrow A$.

8. **Composición de funtores**
Dados dos funtores covariantes $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$, $G : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{E}$, definimos el **funtor composición** $GF : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{E}$ como las composiciones tanto en objetos como en morfismos, es decir, transforma cada objeto A en el objeto $GF(A) = G(F(A))$ y cada morfismo $f : A \longrightarrow B$ en el morfismo $GF(f) = G(F(f)) : GF(A) \longrightarrow GF(B)$.
Vemos que, efectivamente, es un funtor covariante. Para todo A objeto de $\mathscr{C}$,

$$GF(1_A)) = G(F(1_A)) = G(1_{F(A)} = 1_{GF(A)}.$$

Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$, se cumple

$$GF(gf) = G(F(gf)) = G(F(g)F(f)) = G(F(g))G(F(f)) = GF(g)GF(f).$$

Observamos que la composición de funtores es asociativa por serlo la composición de aplicaciones.
Análogamente se tienen la composición de funtores contravariantes, la composición de funtores covariantes con funtores contravariantes y la composición de funtores contravariantes con funtores covariantes.

9. **La categoría de categorías pequeñas Cat**
Cat es una categoría cuyos objetos son las **categorías pequeñas** (categorías cuya clase de objetos es un conjunto) y, si $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ son categorías pequeñas, el conjunto de morfismos es $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathscr{C}, \mathscr{D}) = \mathsf{Func}(\mathscr{C}, \mathscr{D})$, el conjunto de todos los funtores covariantes. La composición de morfismos es la composición de funtores.
Es claro que es una categoría porque la composición de funtores es asociativa y los morfismos identidad son los funtores identidad.

Definición 1.1.7. Decimos que una categoría $\mathscr{D}$ es una **subcategoría** de una categoría $\mathscr{C}$ si $|\mathscr{D}| \subseteq |\mathscr{C}|$ y para cada $A, B \in |\mathscr{D}|$, se tiene $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(A, B) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$. Dada una subcategoría $\mathscr{D}$ de una categoría $\mathscr{C}$, definimos el funtor **inclusión**

$$\begin{array}{cccc} i: & \mathscr{D} & \longrightarrow & \mathscr{C} \\ & A & \longmapsto & A \\ & f: A \longrightarrow B & \longmapsto & f: A \longrightarrow B \end{array}.$$

Definición 1.1.8. Decimos que un funtor covariante $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ es **fiel** si para todos $A, B \in |\mathscr{C}|$, la aplicación $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(A), F(B))$ es inyectiva y que es **pleno** si es sobreyectiva. Se dice que un funtor es **plenamente fiel** si es a la vez pleno y fiel. Se dice que una subcategoría $\mathscr{D}$ es una **subcategoría plena** de una categoría $\mathscr{C}$ si el funtor inclusión $i : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{C}$ es pleno, es decir, para todo par de objetos A, B de $\mathscr{D}$, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$.
Se definen también **fiel**, **pleno** y **plenamente fiel** para funtores contravariantes de manera análoga.

Ejemplo 1.1.9. Claramente, toda categoría es subcategoría de sí misma. Además, **Ab** es una subcategoría plena de **Group** y **CRing** es una subcategoría plena de **Ring**. En general, restringiendo en objetos se pueden construir numerosas subcategorías plenas.

Vemos ahora una caracterización de los funtores covariantes fieles que será clave para aplicar el teorema de Mitchell.

Proposición 1.1.10. *Si $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ es un funtor fiel si y solo si F transforma diagramas no conmutativos en diagramas no conmutativos.*

Demostración.
$\Longrightarrow$ Supongamos que tenemos $f : A \longrightarrow C$ y $g : B \longrightarrow C$ y $h : A \longrightarrow B$ morfismos en $\mathscr{C}$ de manera que $f \neq gh$, entonces, como F es fiel, $F(f) \neq F(gh) \neq F(g)F(h)$ con lo que las imágenes no conmutan.
$\Longleftarrow$ Suponemos $f, g : A \longrightarrow B$ morfismos en $\mathscr{C}$ tales que $F(f) = F(g)$, se tiene que $F(f) = 1_{F(B)}F(g)$ con lo que si F transforma diagramas no conmutativos en diagramas no conmutativos, debe ser $f = 1_B g = g$ y F es fiel. □

Con esto tenemos que si $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ es un funtor covariante fiel, la conmutatividad de un diagrama en $\mathscr{C}$ es equivalente a la conmutatividad de su imagen en $\mathscr{D}$ por F.

Ligado al concepto de funtor, tenemos el de transformación natural entre funtores. Podemos construir categorías cuyos objetos son funtores y cuyos morfismos son transformaciones naturales.

Definición 1.1.11. Una **transformación natural** $\eta : F \longrightarrow G$ de un funtor covariante $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ en un funtor covariante $G : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ es una colección de morfismos en $\mathscr{D}$

$$\{\eta_A : F(A) \longrightarrow G(A)\}_{A \in |\mathscr{C}|}$$

tal que para cada morfismo $f : A \longrightarrow B$ en $\mathscr{C}$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\eta_B"'] & G(B) \end{tikzcd}$$

conmuta, es decir, $\eta_B F(f) = G(f)\eta_A$.
Una **transformación natural** $\eta : F \longrightarrow G$ de un funtor contravariante $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ en un funtor contravariante $G : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ es una familia de morfismos en $\mathscr{D}$

$$\{\eta_A : F(A) \longrightarrow G(A)\}_{A \in |\mathscr{C}|}$$

tal que para cada morfismo $f : A \longrightarrow B$ en $\mathscr{C}$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} F(B) \arrow[r, "\eta_B"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(B) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(A) \arrow[r, "\eta_A"'] & G(A) \end{tikzcd}$$

conmuta, es decir, $\eta_A F(f) = G(f)\eta_B$.
En ambos casos, para cada A objeto de $\mathscr{C}$, al morfismo η_A lo denominamos la **componente de η en A**.

Ejemplo 1.1.12.

1. **Transformación natural identidad**
   Dado un funtor covariante o contravariante $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$, se define la **transformación natural identidad** $1_F : F \longrightarrow F$ dada por $(1_F)_A = 1_{F(A)}$ para todo objeto A de $\mathscr{C}$.

   Es claramente una transformación natural.

2. **El determinante** $\det : \mathrm{GL}_n(-) \longrightarrow -^*$ (véase el Ejemplo 1.1.6)
   Dado un anillo R y $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathrm{GL}_n(R)$, el determinante nos da un morfismo de grupos

$$\begin{array}{rccc} \det_R : & \mathrm{GL}_n(R) & \longrightarrow & R^* \\ & A & \longmapsto & \det_R(A) \end{array}$$

   Estos morfismos constituyen una transformación natural $\det : \mathrm{GL}_n(-) \longrightarrow -^*$ ya que para todo morfismo de anillos $f : R \longrightarrow S$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathrm{GL}_n(R) \arrow[r, "\det_R"] \arrow[d, "\mathrm{GL}_n(f)"'] & R^* \arrow[d, "f^*"] \\ \mathrm{GL}_n(S) \arrow[r, "\det_S"'] & S^* \end{tikzcd}$$

   conmuta, es decir, dado $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathrm{GL}_n(R)$, tenemos

$$f^*(\det_R(A)) = \det((f(a_{ij}))_{ij}) = \det_S(\mathrm{GL}_n(f)(A))$$

   porque f es un morfismo de anillos y $\det_R(A)$ es la evaluación de un polinomio en los coeficientes de la matriz.

3. **Composición de transformaciones naturales**
   Si $\alpha : F \longrightarrow G$, $\beta : G \longrightarrow H$ son transformaciones naturales entre funtores covariantes $F, G, H : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$, definimos la **transformación natural composición** $\beta\alpha : F \longrightarrow H$ dada por el morfismo composición $(\beta\alpha)_A = \beta_A\alpha_A : F(A) \longrightarrow H(A)$ en la categoría $\mathscr{D}$ para todo A objeto de $\mathscr{C}$.
   La composición de transformaciones naturales es claramente una transformación natural porque para todo morfismo $f : A \longrightarrow B$ en $\mathscr{C}$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[r, "\beta_A"] \arrow[d, "G(f)"] & H(A) \arrow[d, "H(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\alpha_B"'] & G(B) \arrow[r, "\beta_B"'] & H(B) \end{tikzcd}$$

   conmuta por ser α y β transformaciones naturales.

4. **Categorías de funtores**
Dadas $\mathscr{C}$ una categoría pequeña y $\mathscr{D}$ una categoría cualquiera, se puede considerar una nueva categoría $\mathsf{Func}(\mathscr{C},\mathscr{D})$, también denotada $\mathscr{D}^{\mathscr{C}}$, cuya clase de objetos es la colección de todos los funtores covariantes de $\mathscr{C}$ en $\mathscr{D}$

$$|\mathsf{Func}(\mathscr{C},\mathscr{D})| = \{F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D} : F \text{ funtor covariante}\}.$$

Y dados dos objetos $F, G : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$, el conjunto de morfismos es el conjunto

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^{\mathscr{C}}}(F, G) = \mathsf{Nat}(F, G)$$

de todas las transformaciones naturales de F en G, también denotado G^F.
Dados dos funtores $F, G : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$, como las transformaciones naturales de F en G son colecciones de morfismos en $\mathscr{D}$ podemos ver $\mathsf{Nat}(F, G)$ como una subclase de

$$\mathsf{Nat}(F, G) \subseteq \prod_{A\in|\mathscr{C}|} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(F(A), G(A)),$$

que es un conjunto por ser un producto cartesiano de conjuntos indexados por un conjunto. Por tanto, $\mathsf{Nat}(F, G)$ también es un conjunto.
Sabemos, por el ejemplo inmediatamente anterior, que dadas dos transformaciones naturales $\alpha : F \longrightarrow G$ y $\beta : G \longrightarrow H$, podemos definir una composición de transformaciones naturales $\beta\alpha : F \longrightarrow H$, que esta composición es asociativa y que para toda $\alpha : F \longrightarrow G$ transformación natural, las transformaciones naturales identidad 1_F y 1_G cumplen $\alpha 1_F = \alpha$ y $1_G\beta = \beta$, es decir, se cumple la existencia del morfismo identidad para cada objeto.

Con lo visto hasta ahora estamos en condiciones de enunciar y demostrar el lema de Yoneda, uno de los resultados clave en teoría de categorías. Dado un objeto A, tenemos el funtor covariante $\mathrm{Hom}(A,-) : \mathscr{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$. Dado cualquier funtor covariante $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$, $F(A)$ es un conjunto. El lema de Yoneda nos indica que las transformaciones naturales de $\mathrm{Hom}(A,-)$ en el funtor F están en biyección con el conjunto $F(A)$.

Lema 1.1.13. ***Lema de Yoneda***. *Dado un funtor covariante $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$, para todo objeto A de $\mathscr{C}$, existe una biyección Φ entre el conjunto de transformaciones naturales del funtor $\mathrm{Hom}(A,-)$ en el funtor F y el conjunto $F(A)$ dada por*

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathsf{Nat}(\mathrm{Hom}\,(A,-)\,,F) & \longrightarrow & F(A) \\ & \alpha & \longmapsto & \alpha_A(1_A) \end{array}.$$

Demostración. Veamos de dónde surge la definición de Φ. Sea α una transformación natural $\alpha : \mathrm{Hom}(A,-) \longrightarrow F$, queremos definir su imagen por Φ. Por definición, para cada objeto B de $\mathscr{C}$, tenemos un morfismo componente $\alpha_B : \mathrm{Hom}(A,B) \longrightarrow F(B)$ que es una aplicación entre conjuntos. Como buscamos definir un elemento en $F(A)$ como imagen de α, tomamos el morfismo $\alpha_A : \mathrm{Hom}(A,A) \longrightarrow F(A)$. Ahora, por la definición de categoría, el único morfismo que siempre existe es el morfismo identidad $1_A : A \longrightarrow A$ con lo que $\alpha_A(1_A) \in F(A)$, por lo que $\Phi(\alpha) = \alpha_A(1_A)$ nos define una aplicación.

Probemos que Φ es biyectiva. Para ello, vamos a construir su inversa. Sea $x \in F(A)$, veamos que existe una única transformación natural $\alpha : \mathrm{Hom}(A,-) \longrightarrow F(A)$ tal que $\alpha_A(1_A) = x$. Para definir una transformación natural, tenemos que definir, para cada objeto B, el morfismo componente $\alpha_B : \mathrm{Hom}(A,B) \longrightarrow F(B)$. Dado un morfismo $f : A \longrightarrow B$, el siguiente diagrama debe conmutar

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(A,A) \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "\mathrm{h}^A(f)"'] & F(A) \arrow[d, "F(f)"] \\ \mathrm{Hom}(A,B) \arrow[r, "\alpha_B"'] & F(B) \end{tikzcd}.$$

Debe ser $\alpha_B(f) = \alpha_B\left(\mathrm{h}^A(f)(1_A)\right) = F(f)(\alpha_A(1_A)) = F(f)(x)$. Por tanto, debemos tomar $\alpha_B(f) = F(f)(x)$. Veamos que esto, efectivamente, define una transformación natural. Si $f : B \longrightarrow C$ es un morfismo en $\mathscr{C}$, tenemos que ver que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(A,B) \arrow[r, "\alpha_B"] \arrow[d, "\mathrm{h}^A(f)"'] & F(B) \arrow[d, "F(f)"] \\
\mathrm{Hom}(A,C) \arrow[r, "\alpha_C"'] & F(C)
\end{tikzcd}$$

conmuta, es decir, $F(f)\alpha_B = \alpha_C \mathrm{h}^A(f)$.
Sea pues $g : A \longrightarrow B$, tenemos que

$$F(f)(\alpha_B(g)) = F(f)(F(g)(x)) = F(fg)(x) = F\left(\mathrm{h}^A(f)(g)\right)(x) = \alpha_C\left(\mathrm{h}^A(f)(g)\right)$$

Por tanto, α es transformación natural y $\alpha_A(1_A) = F(1_A)(x) = x$ como queríamos probar. $\square$

En particular, si tomamos un par de funtores Hom covariantes $\mathrm{Hom}(A,-), \mathrm{Hom}(B,-)$, el lema de Yoneda nos dice que hay tantas transformaciones naturales $\mathrm{Hom}(A,-) \longrightarrow \mathrm{Hom}(B,-)$ como morfismos en $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,A)$ y nos da una manera de escribirlas.

Como consecuencia del lema de Yoneda, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.1.14. ***Embebimiento de Yoneda contravariante.*** *Dada una categoría $\mathscr{C}$, existe un funtor contravariante plenamente fiel $\mathcal{Y} : \mathscr{C} \longrightarrow \mathsf{Func}(\mathscr{C}, \mathbf{Set})$.*

Demostración. Definimos $\mathcal{Y} : \mathscr{C} \longrightarrow \mathsf{Func}(\mathscr{C}, \mathbf{Set})$ tal que transforma cada objeto A, en el funtor covariante $\mathrm{Hom}\,(A,-)$ y cada morfismo $f : A \longrightarrow B$, en la transformación natural

$$\mathrm{Hom}(f,-) : \mathrm{Hom}(B,-) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,-)$$

dada por el morfismo $\mathrm{Hom}(f,C) = \mathrm{h}_C(f)$

$$\begin{array}{rccc}
\mathrm{h}_C(f) : & \mathrm{Hom}(B,C) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(A,C) \\
& \alpha & \longmapsto & \alpha f
\end{array}$$

para todo C objeto de $\mathscr{C}$.

$\mathcal{Y}$ es un funtor contravariante

Tenemos que ver que está bien definido, es decir, que para todo $f : A \longrightarrow B$, la colección de morfismos $\mathrm{Hom}(f,-)$ es, efectivamente, una transformación natural.
Sea un morfismo $f : A \longrightarrow B$ y sea $g : B \longrightarrow C$. Se cumple que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(B,C) \arrow[r, "\mathrm{h}_C(f)"] \arrow[d, "\mathrm{h}^B(g)"'] & \mathrm{Hom}(A,C) \arrow[d, "\mathrm{h}^A(g)"] \\
\mathrm{Hom}(B,D) \arrow[r, "\mathrm{h}_D(f)"'] & \mathrm{Hom}(A,D)
\end{tikzcd}$$

conmuta porque para todo $h : B \longrightarrow C$,

$$\mathrm{h}^A(g)(\mathrm{h}_C(f)(h)) = ghf = \mathrm{h}_D(f)\left(\mathrm{h}^B(g)(h)\right).$$

Falta ver que conserva los morfismos identidad e invierte la composición. Dado un objeto A de $\mathscr{C}$,

$$\mathcal{Y}(1_A) = \mathrm{Hom}(1_A,-)$$

que, para todo objeto B de $\mathscr{C}$, cumple que $\mathrm{h}_B(1_A)$ es la aplicación identidad en $\mathrm{Hom}(A,B)$ porque compone cada morfismo con la identidad y, por tanto, $\mathcal{Y}(1_A) = 1_{\mathrm{Hom}(A,-)}$ es la transformación natural identidad.
Dados dos morfismos $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$, tenemos que ver que

$$\mathrm{Hom}(gf,-) = \mathrm{Hom}(f,-)\mathrm{Hom}(g,-).$$

Sea D un objeto de $\mathscr{C}$, y sea $h : C \longrightarrow D$. Se cumple

$$\mathrm{h}_D(gf)(h) = h(gf) = h(g(f)) = (\mathrm{h}_D(f)\mathrm{h}_D(g))\,(h)$$

con lo que $\mathcal{Y}$ es un funtor contravariante.

$\mathcal{Y}$ es plenamente fiel
Observamos que esto es consecuencia del lema de Yoneda. Si A, B son objetos de $\mathscr{C}$, aplicando el lema de Yoneda para el funtor $\mathrm{Hom}(A,-)$ y el objeto B, sabemos que existe una biyección

$$\begin{array}{rccc} \Phi^{-1}: & \mathrm{Hom}(A,B) & \longrightarrow & \mathsf{Nat}(\mathrm{Hom}(B,-),\mathrm{Hom}(A,-)) \\ & f & \longmapsto & \Phi^{-1}(f) = \alpha \end{array}$$

donde para todo C objeto de $\mathscr{C}$,

$$\begin{array}{rccc} \alpha_C: & \mathrm{Hom}(B,C) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(A,C) \\ & g & \longmapsto & gf \end{array}.$$

Es decir, $\Phi^{-1}(f) = \mathrm{Hom}(f,-) = \mathcal{Y}(f)$.
Lo que hemos probado es que las aplicaciones en morfismos que definen $\mathcal{Y}$ son sobreyectivas, con lo que el funtor es pleno, e inyectivas, con lo que el funtor es fiel.

Por tanto, existe un funtor contravariante $\mathcal{Y} : \mathscr{C} \longrightarrow \mathsf{Func}(\mathscr{C}, \mathbf{Set})$ plenamente fiel como queríamos probar. □

Sabemos que si tenemos un teorema en geometría proyectiva, tenemos un resultado dual obtenido dualizando tanto hipótesis como tesis y una demostración aplicando el principio de dualidad. Vamos a justificar que existe un principio de dualidad análogo en el contexto de la teoría de categorías.

Definición 1.1.15. Dada una categoría $\mathscr{C}$, construimos una categoría $\mathscr{C}^0$ llamada **categoría opuesta** o **dual** de $\mathscr{C}$ cuya clase de objetos es la misma que la de $\mathscr{C}$ y para cada A, B objetos de $\mathscr{C}$, definimos $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^0}(A,B) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,A)$, es decir, cada morfismo $f : A \longrightarrow B$ en $\mathscr{C}$ es un morfismo $B \longrightarrow A$ en $\mathscr{C}^0$. La composición está definida por

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^0}(A,B) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^0}(B,C) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^0}(A,C) \\ (f,g) & \longmapsto & fg \end{array}.$$

Claramente se tiene por definición $\mathscr{C} = \left(\mathscr{C}^0\right)^0$.
Cuando un objeto $A \in |\mathscr{C}|$ se considera como objeto de $\mathscr{C}^0$, lo denotamos como A^0 y, análogamente, para cada morfismo f, denotamos f^0 al correspondiente en la categoría opuesta.
Consideramos

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{C} & \longrightarrow & \mathscr{C}^0 \\ A & \longmapsto & A^0 \\ f : A \longrightarrow B & \longmapsto & f^0 : B^0 \longrightarrow A^0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^0 & \longrightarrow & \mathscr{C} \\ A^0 & \longmapsto & A \\ f : B^0 \longrightarrow A^0 & \longmapsto & f : A \longrightarrow B \end{array}.$$

Con esta notación, tenemos, por definición, $f^0 g^0 = (gf)^0$. Son, entonces, dos funtores contravariantes llamados **funtores dualizantes**. Además, la composición en ambos sentidos da la identidad

en $\mathscr{C}$ y en $\mathscr{C}^0$. Ambos funtores invierten el sentido de los morfismos y, con ello, el orden de la composición. Esto implica que cada vez que definamos un concepto categórico, tendremos también el correspondiente concepto dual invirtiendo los morfismos y sus composiciones, es decir, girando las flechas.
Además, para cada afirmación sobre una categoría tenemos también una afirmación dual con los morfismos invertidos. Si una afirmación es cierta para una categorías $\mathscr{C}$, entonces la afirmación dual es cierta para la categoría dual $\mathscr{C}^0$. Ahora, si una afirmación es cierta para cada categoría $\mathscr{C}$, entonces la afirmación dual es cierta para cada correspondiente categoría dual $\mathscr{C}^0$, pero como $\mathscr{C} = \left(\mathscr{C}^0\right)^0$, el resultado dual es cierto para todas las categorías. Con eso tenemos el siguiente resultado.

> **Principio de dualidad.** *Si un teorema es cierto para todas las categorías, entonces el teorema dual también es cierto para todas las categorías.*

Gracias a esto solo tenemos que demostrar la mitad de los resultados sobre categorías y aplicar el principio de dualidad.

1.2. Tipos de objetos y morfismos

Introducimos diferentes definiciones de tipos de morfismos y objetos y sus propiedades que muestran que el lenguaje común en muchos contextos matemáticos es el propio de la teoría de categorías.

Definición 1.2.1. Dado un morfismo $f : A \longrightarrow B$ en una categoría. Se dice que f es una **retracción** si existe un morfismo $f' : B \longrightarrow A$ tal que $ff' = 1_B$. Dualmente, se dice que f es una **sección** o **coretracción** si existe un morfismo $f'' : B \longrightarrow A$ tal que $f''f = 1_A$. Se dice que un morfismo es **isomorfismo** si es sección y retracción. En este caso se tiene

$$f' = 1_A f' = f'' f f' = f'' 1_B = f''.$$

Decimos que $f' = f''$ es un **inverso** de f y lo denotamos f^{-1}.
Dados dos objetos A y B en una categoría, decimos que A es **isomorfo** a B si existe un isomorfismo $f : A \longrightarrow B$. En este caso el inverso es único y es isomorfismo.

Ejemplo 1.2.2. Sabemos que los isomorfismos en las categorías **Group**, **Ring** y ${}_R$**Mod** son los morfismos biyectivos porque la aplicación inversa también es morfismo. Además, es claro por definición que los homeomorfismos son los isomorfismos en **Top**.

Definición 1.2.3. Dado un morfismo $f : A \longrightarrow B$ en una categoría. Se dice que f es **endomorfismo** si $A = B$. Se dice que f es **monomorfismo** si $f\alpha = f\beta$ implica $\alpha = \beta$ para todos α, β morfismos con codominio A. Dualmente, se dice que f es **epimorfismo** si $\alpha f = \beta f$ implica $\alpha = \beta$ para todos $\alpha\beta$ morfismos con dominio B. Una categoría $\mathscr{C}$ es **equilibrada** si todo morfismo que es a la vez monomorfismo y epimorfismo es isomorfismo.

Lema 1.2.4. *Sean $f : A \longrightarrow B$, $g : C \longrightarrow A$ morfismos en una categoría. Se cumplen*

1. *Si f y g son monomorfismos, fg es monomorfismo. Dualmente, si f y g son epimorfismos, fg es epimorfismo.*
2. *Si fg es monomorfismo, g es monomorfismo. Dualmente, si fg es epimorfismo, f es epimorfismo.*
3. *Si f y g son isomorfismos, fg es isomorfismo.*

Demostración. Inmediata. □

Teorema 1.2.5. *El ser isomorfos es una relación de equivalencia en la clase de objetos de una categoría.*

Demostración. Inmediata □

En vista del resultado anterior, un problema recurrente en matemáticas es dar diferentes caracterizaciones de cuándo dos objetos son isomorfos en una cierta categoría concreta. Por ejemplo, sabemos que para todo cuerpo $\mathbb{K}$, dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión finita son isomorfos si y solo si tienen la misma dimensión. El siguiente resultado es útil para determinar que dos objetos en una categoría no son isomorfos.

Teorema 1.2.6. *Los funtores entre categorías conservan los isomorfismos. Si $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ es un funtor covariante o contravariante y f es un isomorfismo, entonces $F(f)$ también es un isomorfismo en $\mathscr{D}$. Más aún, se cumple que $F(f)^{-1} = F\left(f^{-1}\right)$.*

Demostración. Sea $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ un funtor covariante y sea $f : A \longrightarrow B$ isomorfismo. Tenemos que ver que $F(f) : F(A) \longrightarrow F(B)$ es isomorfismo.
Por definición de isomorfismo, existe f^{-1} el inverso de f y, por definición de funtor,

$$F(f)\, F\left(f^{-1}\right) = F\left(f f^{-1}\right) = F(1_B) = 1_{F(B)}.$$

Y $F(f)$ es isomorfismo con inverso $F\left(f^{-1}\right)$.
El caso contravariante es análogo ya que $F(f)\, F\left(f^{-1}\right) = F\left(f^{-1} f\right) = F(1_A) = 1_{F(A)}$. □

Ejemplo 1.2.7. En **Set**, los monomorfismos son las aplicaciones inyectivas y los epimorfismos las sobreyectivas.

Si dos objetos no son isomorfos bajo un funtor, entonces no son isomorfos en la categoría original. Por ejemplo, sabemos que si dos espacios topológicos conexos por caminos tienen grupos fundamentales no isomorfos, entonces no pueden ser homeomorfos.

Vamos aplicar el teorema anterior para probar la existencia de una categoría no equilibrada.

Ejemplo 1.2.8. No es cierto, en general, que un morfismo que sea a la vez monomorfismo y epimorfismo es isomorfismo, es decir, no toda categoría es equilibrada. La categoría de anillos **Ring** no es equilibrada. Vamos a ver que el morfismo inclusión $\iota : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ es monomorfismo y epimorfismo, pero no isomorfismo en la categoría de anillos.
ι es monomorfismo. Como ι es inyectivo, es cancelable a izquierda para toda aplicación y, en particular, para todo morfismo en **Ring**.
ι es epimorfismo. Sea R un anillo cualquiera y $f, g : \mathbb{Q} \longrightarrow R$ morfismos de anillos tales que $f\iota = g\iota$. Veamos que $f = g$, es decir, $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{Q}$. Dado $x \in \mathbb{Q}$, $x = \frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{Z}$, $f(x) = f\left(\frac{p}{q}\right) = f(p)f(q)^{-1} = g(p)g(q)^{-1} = g\left(\frac{p}{q}\right) = g(x)$.
ι no es isomorfismo. Sabemos que $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ no son isomorfos como anillos porque, por ejemplo, $\mathbb{Z}$ no es un cuerpo y $\mathbb{Q}$ sí, pero lo podemos argumentar de manera categórica. Consideramos el funtor olvido $F : \mathbf{Ring} \longrightarrow \mathbf{Set}$. Como todo funtor, F conserva isomorfismos. Sabemos que los isomorfismos en la categoría de conjuntos son las aplicaciones biyectivas.
Como $F(\iota) = \iota$ no es una aplicación sobreyectiva, ι no es un isomorfismo de anillos.

Como observación de lo anterior, tenemos que en categorías concretas de conjuntos con estructura cuyos morfismos son aplicaciones, como las del Ejemplo 1.1.4, los isomorfismos son siempre biyecciones porque los funtores olvido a **Set** mandan los isomorfismos en biyecciones. Es decir, los isomorfismos son siempre morfismos biyectivos. Un contraejemplo del recíproco es **Top** ya que podemos tener una aplicación continua biyectiva cuya inversa no es continua con lo que no es un homeomorfismo.

Usaremos el siguiente resultado para probar que ciertos morfismos son isomorfismos.

Proposición 1.2.9. *Si un morfismo en una categoría es retracción y monomorfismo, es isomorfismo. Dualmente, si un morfismo es sección y epimorfismo, es isomorfismo.*

Demostración. Por dualidad, basta probarlo para el caso de retracción y monomorfismo. Si $f : A \longrightarrow B$ es retracción, existe $f' : B \longrightarrow A$ tal que $ff' = 1_B$. Veamos que $f'f = 1_A$.

$$f(f'f) = (ff')f = 1_B f = f = f1_A.$$

Como f es monomorfismo, $f'f = 1_A$ y f es isomorfismo. □

Vamos a definir ahora lo que son los objetos iniciales, finales y cero que se distinguen esencialmente del resto de objetos en una categoría por la manera en que se relacionan mediante morfismos. Uno de las propiedades que deberá cumplir una categoría para ser abeliana es que tenga un objeto cero.

Definición 1.2.10. Un objeto A es un **objeto inicial** si para todo objeto B existe un único morfismo $f : A \longrightarrow B$. Dualmente, un objeto A es un **objeto final** si para todo objeto B existe un único morfismo $f : B \longrightarrow A$. Un objeto es un **objeto cero** si es inicial y final.

Ejemplo 1.2.11. En **Set** el vacío es inicial porque para todo conjunto X existe una única aplicación $\varnothing \longrightarrow X$, la aplicación vacía. Además, los conjuntos unipuntuales $\{a\}$ son finales porque para cada conjunto X, se puede definir una única aplicación $X \longrightarrow \{a\}$.
El módulo cero $\mathbf{0} = \{0\}$ es claramente un R-módulo izquierdo sobre cualquier anillo R y objeto cero en ${}_R\mathbf{Mod}$.
$\mathbb{Z}$ con su estructura habitual de anillo es inicial en **Ring** porque para todo anillo R, si $f : \mathbb{Z} \longrightarrow R$ es un morfismo de anillos, entonces debe ser $f(n) = n \cdot f(1) = n \cdot 1$ con lo que es único. Además, el anillo cero 0 es final en **Ring**.

Con la siguiente proposición, podemos comprobar que los objetos iniciales, finales y cero son esencialmente únicos. En este sentido, si una categoría tiene objetos cero, denotaremos como $\mathbf{0}$ a uno de ellos.

Proposición 1.2.12. *Si en una categoría existe objeto inicial, entonces es único salvo isomorfismo único. Por dualidad, dada la existencia se tiene también la unicidad salvo isomorfismo único para objetos finales y objetos cero.*

Demostración. Sea $\mathscr{C}$ una categoría y suponemos $A, B \in |\mathscr{C}|$ objetos iniciales. Por definición, existen unos únicos morfismos $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow A$. Si X es un objeto inicial, el único morfismo $h : X \longrightarrow X$ que existe debe ser la identidad 1_X. Como $fg : A \longrightarrow A$ y $gf : B \longrightarrow B$, debe ser $fg = 1_A$ y $gf = 1_B$ y f es isomorfismo (único). Por dualidad, obtenemos el resultado para objetos finales. El resultado se sigue para el objeto cero. □

Con esto vemos, por ejemplo, que el módulo cero en ${}_R\mathbf{Mod}$ se distingue desde el punto de vista categórico del resto de R-módulos no por tener un único elemento, sino por ser esencialmente el único R-módulo del que llegan y salen morfismos únicos para cada R-módulo.

Aplicando el resultado anterior, vemos que **Set** no tiene objetos cero porque los unipuntuales son no vacíos y que **Ring** tampoco tiene objetos cero porque $\mathbb{Z}$ no es isomorfo al anillo cero 0.

Introducimos ahora una noción relacionada con la de objeto cero.

Definición 1.2.13. Sea $\mathscr{C}$ una categoría con morfismos cero. Dados dos objetos X, Y, al único morfismo que factoriza por el objeto cero $0_{XY} : X \longrightarrow \mathbf{0} \longrightarrow Y$ lo llamamos **morfismo cero**. Para todos $X, Y, Z \in |\mathscr{C}|$ y todos $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$, se cumple $0_{YZ}f = 0_{XZ} = g0_{XY}$.

A veces escribiremos los morfismos cero simplemente como 0 cuando no haya confusión.

Ejemplo 1.2.14. Morfismos cero en ${}_R\mathbf{Mod}$. Los morfismos cero son los morfismos de R-módulos que mandan cada elemento en el elemento neutro.

Introducimos ahora una relación de equivalencia que nos permitirá definir subobjetos y objetos cociente.

Definición 1.2.15. Dados dos monomorfismos $f : A \longrightarrow B$ y $g : C \longrightarrow B$ con el mismo codominio, decimos que f y g son **monomorfismos equivalentes** si existe un isomorfismo $h : A \longrightarrow C$ tal que $f = gh$.

Proposición 1.2.16. *La relación de ser equivalentes es una relación de equivalencia en la clase de todos los monomorfismos de $\mathscr{C}$ con codominio B.*

Demostración. Se sigue de que el inverso y la composición de isomorfismos es isomorfismo. $\square$

Definición 1.2.17. Sea B un objeto en una categoría. Un **subobjeto** de B es una clase de equivalencia de monomorfismos tal que sus representantes tienen codominio B, es decir, es la clase $[f]$ de un monomorfismo $f : A \longrightarrow B$.
Decimos que un subobjeto $[f]$ de B es **menor** que otro subobjeto $[g]$ y se denota $[f] \leq [g]$ si f factoriza por g, es decir, si existe h tal que $f = gh$.

Observamos que en la definición anterior h es único por ser g monomorfismo.

Debemos probar que la definición de ser menor no depende del representante del subobjeto. Una vez visto esto, en la práctica trabajaremos con los representantes de las clases de equivalencia, es decir, con los monomorfismos con lo que denotaremos $[f] = f$.

Teorema 1.2.18. *La relación de ser menor está bien definida y es una relación de orden*

Demostración. Inmediata de la definición. $\square$

Por dualidad definimos los conceptos de **epimorfismos equivalentes**, **objeto cociente** y la relación de orden dual para los epimorfismos.

1.3. Construcciones universales

En esta sección vamos a dar las definiciones de unas construcciones universales: productos, intersecciones y núcleos. Para explicar intuitivamente qué se entiende por construcción universal, introducimos ahora las nociones de producto y coproducto en una categoría cualquiera que generalizan el producto cartesiano y la unión disjunta de conjuntos respectivamente. Para ello, vamos a ver que el producto cartesiano cumple una propiedad de existencia y unicidad de un cierto morfismo que conocemos como propiedad universal del producto.

Dados dos conjuntos X, Y, consideramos el producto cartesiano $X \times Y$ y las proyecciones

$$\begin{array}{rccc} \pi_X : & X \times Y & \longrightarrow & X \\ & (x,y) & \longmapsto & x \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \pi_Y : & X \times Y & \longrightarrow & Y \\ & (x,y) & \longmapsto & y \end{array}.$$

Se cumple la siguiente propiedad universal: Si Z es un conjunto y $f : Z \longrightarrow X$ y $g : Z \longrightarrow Y$ son dos aplicaciones, existe una única aplicación $\varphi : Z \longrightarrow X \times Y$ que cumple $f = \pi_X \circ \varphi$ y $g = \pi_Y \circ \varphi$. Es precisamente la aplicación dada por $\varphi(z) = (f(z), g(z)) \in X \times Y$ para todo $z \in Z$.

$$(\pi_X \circ \varphi)(z) = (\pi_X \varphi(z)) = \pi_X(f(z), g(z)) = f(z) \qquad \forall z \in Z.$$
$$(\pi_Y \circ \varphi)(z) = (\pi_Y \varphi(z)) = \pi_X(f(z), g(z)) = g(z) \qquad \forall z \in Z.$$

La aplicación es única porque está determinada por f y g. Se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[d, dotted, "!\varphi"] \arrow[ddl, bend right, "f"'] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\ & X \times Y \arrow[dl, "\pi_Y"] \arrow[dr, "\pi_X"'] & \\ X & & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & z \arrow[d, dotted, mapsto, "!\varphi"] \arrow[ddl, bend right, mapsto, "f"'] \arrow[ddr, bend left, mapsto, "g"] & \\ & (f(z), g(z)) \arrow[dl, mapsto, "\pi_Y"] \arrow[dr, mapsto, "\pi_X"'] & \\ f(z) & & g(z) \end{tikzcd}.$$

Podemos generalizar al caso de producto cartesiano de un conjunto infinito de conjuntos. Sea I un conjunto y $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos no vacíos. Consideramos el producto cartesiano $\prod_{i\in I} X_i$ y, para cada $i \in I$, la proyección i-ésima $\pi_i : \prod_{i\in I} X_i \longrightarrow X_i$, $(x_i)_{i\in I} \longmapsto x_i$.

Observamos que si Z es un conjunto y para cada $i \in I$ tenemos una aplicación $f_i : Z \longrightarrow X_i$, entonces existe una única aplicación $\varphi : Z \longrightarrow \prod_{i\in I} X_i$, la dada por $\varphi(z) = (f_i(z))_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$ para todo $z \in Z$, que cumple $f_j = \pi_j \circ \varphi$ para todo $j \in I$.

$$(\pi_j \circ \varphi)(z) = \pi_j(\varphi(z)) = \pi_j\left((f_i(z))_{i\in I}\right) = f_j(z) \qquad \forall j \in I, \forall z \in Z.$$

Vamos a generalizar esto definiendo productos en una categoría cualquiera de manera que se cumpla una propiedad universal análoga para los morfismos. Obtenemos la noción de coproducto por dualidad.

Definición 1.3.1. Sea $\mathscr{C}$ una categoría y sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de objetos en $\mathscr{C}$.
Un **producto** de $\{X_i\}_{i\in I}$ es un objeto $\prod_{i\in I} X_i \in |\mathscr{C}|$ y, para cada $i \in I$, un morfismo $\pi_i : \prod_{i\in I} X_i \longrightarrow X_i$ tal que si Z es un objeto de $\mathscr{C}$ y $p_i : Z \longrightarrow X_i$ es un morfismo para cada $i \in I$, entonces existe un único morfismo $\varphi : Z \longrightarrow \prod_{i\in I} X_i$ tal que $p_i = \pi_i\varphi$ para todo $i \in I$.
Dualmente, un **coproducto** de $\{X_i\}_{i\in I}$ es un objeto $\coprod_{i\in I} X_i \in |\mathscr{C}|$ y, para cada $i \in I$, un morfismo $u_i : X_i \longrightarrow \coprod_{i\in I} X_i$ tal que si Z es un objeto de $\mathscr{C}$ y $q_i : X_i \longrightarrow Z$ es un morfismo para cada $i \in I$, entonces existe un único morfismo $\psi : \coprod_{i\in I} X_i \longrightarrow Z$ tal que $q_i = \psi u_i$ para todo $i \in I$.
Los morfismos $\{\pi_i\}_{i\in I}$ se llaman **proyecciones** y los $\{u_i\}_{i\in I}$ **inyecciones**.
Se dice que una categoría es una categoría **con productos pequeños** si existe un producto para cada conjunto de objetos. Se dice que una categoría es una categoría con **coproductos pequeños** si existe un coproducto para cada conjunto de objetos.

Vemos ahora una colección de ejemplos en los que se construyen productos y coproductos en categorías conocidas.

Ejemplo 1.3.2.

1. En la categoría de conjuntos, los productos cartesianos son productos y las uniones disjuntas son coproductos.
   Hemos definido producto precisamente de manera que el producto cartesiano con las proyecciones sea un producto. Vamos a ver ahora que la unión disjunta es el concepto dual. Dado un conjunto $\{X_i\}_{i\in I} \subset |\mathbf{Set}|$, definimos la unión disjunta como el conjunto

   $$\coprod_{i\in I} X_i = \left\{(x,i) \in \left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) \times I : i \in I, x \in X_i\right\}.$$

   Consideramos para cada $i \in I$, la aplicación $u_i : X_i \longrightarrow \coprod_{i\in I} X_i$, $x \longmapsto (x,i)$. Tenemos que ver que es un coproducto en la categoría de conjuntos. Suponemos un conjunto Z y para cada $i \in I$, un morfismo $f_i : X_i \longrightarrow Z$. Queremos encontrar una aplicación $\psi : \coprod_{i\in I} X_i \longrightarrow Z$ tal que $f_i = \psi \circ u_i$ para todo $i \in I$. Dado $(x,i) \in X_i \times \{i\}$, se tiene que cumplir

   $$f_i(x) = \psi(u_i(x)) = \psi((x,i)).$$

   Claramente, debemos definir ψ dada por $\psi((x,i)) = f_i(x)$ para todo $(x,i) \in \coprod_{i\in I} X_i$. Es claro que es aplicación, que es única porque está determinada por $\{f_i\}_{i\in I}$ y que cumple la propiedad por construcción.

2. Productos en **Group**
   Sean $(X, \times), (Y, \diamond)$ grupos, recordamos que se induce en el producto cartesiano una estructura de grupo $(X \times Y, +)$ operando coordenada a coordenada. Repitiendo lo hecho en el ejemplo anterior en la categoría **Set**, veamos que el producto cartesiano $X \times Y$ con las proyecciones

$$\begin{array}{cccc} \iota_X: & X & \longrightarrow & X \times Y \\ & x & \longmapsto & (x, 0) \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \iota_Y: & Y & \longrightarrow & X \times Y \\ & y & \longmapsto & (0, y) \end{array}$$

   es un producto en **Group**. Si $(x, y), (z, t) \in X \times Y$, comprobemos la propiedad universal. Si $(Z, \star)$ es un grupo y $f : Z \longrightarrow X$ y $g : Z \longrightarrow Y$ son morfismos de grupos, el morfismo $\varphi : Z \longrightarrow X \times Y$ dado por la propiedad universal del producto en **Set** también es un morfismo de grupos. Si $z, w \in Z$, entonces

$$\varphi(z \star w) = (f(z) \times f(w), g(z) \diamond g(w)) = (f(z), g(z)) + (f(w), g(w)) = \varphi(z) + \varphi(w).$$

   Además, si X e Y son R-módulos izquierdos, entonces $X \times Y$ hereda también una estructura de R-módulo izquierdo definida coordenada a coordenada que cumple la propiedad universal.

3. Coproductos en **Group**
   Vamos a ver que se pueden construir inyecciones en el producto cartesiano de manera que también es coproducto en la categoría de grupos. Sean $(X, \times), (Y, \diamond)$ grupos. Definimos

$$\begin{array}{cccc} \iota_X: & X & \longrightarrow & X \times Y \\ & x & \longmapsto & (x, 0) \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \iota_Y: & Y & \longrightarrow & X \times Y \\ & y & \longmapsto & (0, y) \end{array}.$$

   Veamos que $X \times Y$ con ι_X y ι_Y es un coproducto en **Group**. Supongamos que existe un grupo W y morfismos de grupos $w_X : X \longrightarrow W$, $w_Y : Y \longrightarrow W$ cualesquiera. Tenemos que ver que existe un único morfismo de grupos $\psi : X \times Y \longrightarrow W$ tal que $w_X = \psi\iota_X$ y $w_Y = \psi\iota_B$.
   Es fácil comprobar que el morfismo buscado es:

$$\psi(x, y) = \psi((x, 0) + (0, y)) = \psi(x, 0) + \psi(0, y) = \psi(\iota_X(x)) + \psi(\iota_Y(y)) = w_X(x) + w_Y(y).$$

   Como en el ejemplo anterior, podemos construir coproductos en ${}_R\mathbf{Mod}$.

Una de las características principales de las propiedades universales es que dotan de unicidad a las construcciones salvo un isomorfismo único que, en cierto sentido, determina la construcción. Lo vemos en el caso de productos y coproductos con la siguiente proposición.

Proposición 1.3.3. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría y sea $\{X_i\}_{i\in I}$ un conjunto de objetos de $\mathscr{C}$. Si tenemos dos productos de $\{X_i\}_{i\in I}$, $\{\pi_i : X \longrightarrow X_i\}_{i\in I}$ y $\{\pi'_i : X' \longrightarrow X_i\}_{i\in I}$, entonces existe un único isomorfismo $\varphi : X \longrightarrow X'$ tal que $\pi_i = \varphi\pi'_i$ para todo $i \in I$. Es decir, el producto es único salvo isomorfismo y además existe un único isomorfismo que determina las proyecciones.*
Dualmente, si existe un coproducto de $\{X_i\}_{i\in I}$, entonces es único salvo isomorfismo y dados dos coproductos existe un único isomorfismo que determina las inyecciones.

Demostración. Vamos a ver que el resultado está garantizado por la propiedad universal del producto.
Sean $(X, \{p_i : X \longrightarrow X_i\}_{i\in I})$ y $(X', \{p'_i : X' \longrightarrow X_i\}_{i\in I})$ dos productos de $\{X_i\}_{i\in I}$. Para cada $i \in I$, tenemos $p_i : X \longrightarrow X_i$ y como X' es producto, existe un único morfismo $\varphi : X \longrightarrow X'$ tal que $p_i = p'_i\varphi$ para todo $i \in I$. Veamos a ver que φ es el isomorfismo único que queríamos. Para cada $i \in I$, tenemos $p'_i : X' \longrightarrow X_i$ y como X es producto, existe un único morfismo $\varphi' : X' \longrightarrow X$ tal que $p'_i = p_i\varphi'$ para todo $i \in I$. Como φ y φ' son únicos, también lo son sus composiciones φ y φ' que cumplen $p_i = p_i\varphi'\varphi$ y $p'_i = p'_i\varphi\varphi'$ con lo que deben ser $\varphi'\varphi = 1_X$ y $\varphi\varphi' = 1_{X'}$. φ es un isomorfismo. Por dualidad, tenemos el caso para coproductos. $\square$

A partir de ahora dotamos de unicidad a los productos y a los coproductos en el sentido del resultado anterior.

En las categorías abelianas trabajaremos con morfismos de coproductos finitos en productos finitos. Para simplificar la notación, vamos a ver que podemos representar estos morfismos como matrices cuyos elementos son morfismos entre los factores.

Observación 1.3.4. Sean $\{A_j\}_{j\in J}, \{B_i\}_{i\in I}$ dos familias de objetos de una categoría tal que existen el coproducto $\coprod\limits_{j\in J} A_j$ y el producto $\prod\limits_{i\in I} B_i$. Todo morfismo $F : \coprod\limits_{j\in J} A_j \longrightarrow \prod\limits_{i\in I} B_i$ determina una única familia de morfismos $\{f_{ij} : A_j \longrightarrow B_i\}_{i\in I, j\in J}$ y, recíprocamente, toda tal familia de morfismos determina un único morfismo del coproducto al producto.
Con las notaciones anteriores, si fijamos $i \in I$, tenemos la familia de morfismos $\{f_{ij} : A_j \longrightarrow B_i\}_{j\in J}$. Entonces, por la propiedad universal del conúcleo, para cada $i \in I$, existe un único morfismo

$$\psi_i : \coprod_{j\in J} A_j \longrightarrow B_i$$

tal que para todo $j \in J$, se tiene $f_{ij} = \psi_i \iota_j$.
Ahora, a partir de la familia de morfismos $\left\{\psi_i : \coprod\limits_{j\in J} A_j \longrightarrow B_i\right\}_{i\in I}$ existe, por la propiedad universal del producto, un único morfismo

$$F : \coprod_{j\in J} A_j \longrightarrow \prod_{i\in I} B_i$$

tal que $\pi_i F = \psi_i$ para todo $i \in I$.
Además, se tiene el recíproco porque F es el único morfismo tal que $\pi_i F \iota_j = f_{ij}$ para todos $i \in I$ y $j \in J$, es decir, podemos obtener los f_{ij} componiendo con las proyecciones y las inyecciones.
Observamos que si $n, m \in \mathbb{N}$ e $I = \{1, \dots, n\}$ y $J = \{1, \dots, m\}$ son conjuntos finitos, existe una biyección entre $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}\left(\coprod\limits_{j\in J} A_j, \prod\limits_{i\in I} B_i\right)$ y el conjunto de matrices de dimensión $n \times m$ de la forma $\left(f_{ij}\right)_{ij}$ con $f_{ij} \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A_j, B_i)$ con lo que tenemos una **representación matricial** de los morfismos de coproductos en productos.
Como abuso de notación en la representación matricial, a veces escribiremos los morfismos identidad como 1 y los morfismos cero como 0.

Introducimos la definición de intersección que nos permitirá probar que en una categoría abeliana los productos y los coproductos de dos objetos son isomorfos.

Definición 1.3.5. Sea $\{u_i : A_i \longrightarrow A\}_{i\in I}$ una familia de subobjetos de un objeto A de una categoría. Una **intersección** de la familia, es un objeto A' y un morfismo $u : A' \longrightarrow A$ tal que para cada $i \in I$ existe $v_i : A' \longrightarrow A_i$ de manera que $u = u_i v_i$ y es universal, es decir, todo morfismo $B \longrightarrow A$ que factorice por cada u_i con $i \in I$ factoriza de manera única por u.

Observamos que el subobjeto dado por una intersección es el mayor subobjeto que es menor que todos los subobjetos de la familia. De la misma manera que con los productos y los coproductos, tenemos unicidad salvo isomorfismo único dada por la propiedad universal.

Definimos ahora núcleo y conúcleo que generalizan los conocidos de morfismos de R-módulos, pero pasarán de ser objetos a ser morfismos. Se requerirá por definición que las categorías abelianas tengan núcleos y conúcleos.

Definición 1.3.6. Sea $\mathscr{C}$ una categoría con objeto cero $\mathbf{0}$.
Un **núcleo** de un morfismo $f : A \longrightarrow B$ es un morfismo $\mathsf{Ker}(f) : \mathsf{Ker}\, f \longrightarrow A$ tal que $f\mathsf{Ker}(f) = 0$ y es universal respecto a esta propiedad. Es decir, si existe $g : Z \longrightarrow A$ tal que $fg = 0$, entonces existe

un único morfismo $\varphi : Z \longrightarrow \mathsf{Ker}\, f$ tal que $g = \mathsf{Ker}(f)\varphi$.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[d, dotted, "!\varphi"'] \arrow[dr, "g"] \arrow[drr, bend left, "\mathbf{0}"] & & \\
\mathsf{Ker}\, f \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\mathbf{0}"'] & A \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

Dualmente, un **conúcleo** de un morfismo $f : A \longrightarrow B$ es un morfismo $\mathsf{Coker}(f) : B \longrightarrow \mathsf{Coker}\, f$ tal que $\mathsf{Coker}(f)f = 0$ y es universal respecto a esta propiedad. Es decir, si existe $g : B \longrightarrow Z$ tal que $gf = 0$, entonces existe un único morfismo $\psi : \mathsf{Coker}\, f \longrightarrow Z$ tal que $g = \psi\mathsf{Coker}(f)$.

$$\begin{tikzcd}
& & Z \\
A \arrow[r, "f"] \arrow[urr, bend left, "\mathbf{0}"] \arrow[rr, bend right, "\mathbf{0}"'] & B \arrow[r] \arrow[ur, "g"] & \mathsf{Coker}\, f \arrow[u, dotted, "!\psi"']
\end{tikzcd}$$

Ejemplo 1.3.7.

1. **Núcleos en $_R$Mod**
Sea R un anillo y sea $f : M \longrightarrow N$ un morfismo de R-módulos. Vamos a ver que el submódulo núcleo $\mathsf{Ker}\, f = f^{-1}(0)$ con el monomorfismo inclusión $\iota : \mathsf{Ker}\, f \longrightarrow N$ son un núcleo de f en $_R$**Mod**.
Claramente, la composición es el morfismo cero $f\iota = 0$ porque para todo $x \in \mathsf{Ker}\, f$,
$$(f\iota)(x) = f(\iota(x)) = f(x) = 0.$$
Suponemos que existe un morfismo de R-módulos $g : Z \longrightarrow M$ tal que $fg = 0$, esto es, $f(g(z)) = 0$ para todo $z \in Z$, es decir, $g(z) \in \mathsf{Ker}\, f$ para todo $z \in Z$. Esto nos permite definir la aplicación $\varphi : Z \longrightarrow \mathsf{Ker}\, f$, $z \longmapsto \varphi(z) = g(z)$. φ es trivialmente un morfismo de R-módulos por serlo g y f. Se cumple que $g = \iota\varphi$ ya que $g(z) = \iota(g(z))$ para todo $z \in Z$ y, además, φ es el único tal morfismo con esa propiedad ya que si existe otro $\varphi' : Z \longrightarrow \mathsf{Ker}\, f$ tal que $g = \iota\varphi'$, entonces se tiene $\varphi'(z) = \iota(\varphi'(z)) = g(z) = \iota(\varphi(z)) = \varphi(z)$ para todo $z \in Z$ y $\varphi' = \varphi$.

2. **Conúcleos en $_R$Mod**
Sea R un anillo y sea $f : M \longrightarrow N$ un morfismo de R-módulos. Vamos a ver que el R-módulo cociente conúcleo $\mathsf{Coker}\, f = N/f(M)$ con el epimorfismo proyección $\pi : N \longrightarrow N/f(M)$ es un conúcleo de f en $_R$**Mod**.
Claramente, la composición es el morfismo cero $\pi f = 0$ porque para todo $m \in M$,
$$\pi(f(m)) = f(m) + f(M) = 0 + f(M).$$
Suponemos ahora que existe un morfismo de R-módulos $g : N \longrightarrow Z$ tal que $gf = 0$, es decir, $g(f(n)) = 0$ para todo $n \in N$. Definimos la aplicación $\psi : N/f(M) \longrightarrow Z$, $n + f(M) \longmapsto g(n)$ que está bien definida, es decir, las imágenes no dependen del cambio de representante. Si $n, n' \in N$ tales que $n + f(M) = n' + f(M) \longleftrightarrow n - n' \in f(M)$, existe $m \in M$ tal que $f(m) = n - n'$ y como $gf = 0$,
$$0 = g(f(m)) = g(n - n') = g(n) - g(n') = \psi\left(n + f(M)\right) - \psi\left(n' + f(M)\right)$$
ψ es trivialmente un morfismo de R-módulos por serlo g. Además, se cumple $g = \psi\pi$ por la definición de g y ψ es el único tal morfismo con esta propiedad.

Usaremos el siguiente lema recurrentemente.

Lema 1.3.8. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría con objeto cero $\mathbf{0}$. Se cumplen:*

1. *Todo núcleo es monomorfismo y todo conúcleo es epimorfismo.*

2. *Dado un morfismo $f : A \longrightarrow B$, dos núcleos de f definen el mismo subobjeto de A y dos conúcleos de f definen el mismo objeto cociente de B. Además, los núcleos y conúcleos son únicos salvo isomorfismo único.*

3. *Para todo A objeto de $\mathscr{C}$, el morfismo identidad 1_A es un núcleo del único morfismo cero $0_{A\mathbf{0}} : A \longrightarrow \mathbf{0}$ y, por dualidad, conúcleo del único morfismo cero $0_{\mathbf{0}A} : \mathbf{0} \longrightarrow A$.*

4. *Si $f : A \longrightarrow B$ es monomorfismo, $\mathsf{Ker}(f) = 0$. Dualmente, si f es epimorfismo, $\mathsf{Coker}(f) = 0$.*

5. *Si $f : A \longrightarrow B$ es un morfismo con núcleo y $g : B \longrightarrow C$ es un monomorfismo, entonces $\mathsf{Ker}(f)$ también es núcleo de la composición gf. Dualmente, si g es un morfismo con conúcleo y f es un epimorfismo, entonces $\mathsf{Coker}(g)$ también es conúcleo de la composición gf.*

Demostración.

1. Sea $f : A \longrightarrow B$ un morfismo con núcleo $\mathsf{Ker}(f) : \mathsf{Ker}\, f \longrightarrow A$. Sean $\alpha, \beta : C \longrightarrow \mathsf{Ker}\, f$ tales que $\mathsf{Ker}(f)\alpha = \mathsf{Ker}(f)\beta$. Tenemos que probar que $\alpha = \beta$. Componiendo con f tenemos $f\mathsf{Ker}(f)\alpha = 0 = f\mathsf{Ker}(f)\beta$. Por la propiedad universal del núcleo aplicada a $\mathsf{Ker}(f)\alpha = \mathsf{Ker}(f)\beta$, existe un único morfismo $\varphi : C \longrightarrow \mathsf{Ker}\, f$ tal que se cumplen $\mathsf{Ker}(f)\alpha = \mathsf{Ker}(f)\varphi = \mathsf{Ker}(f)\beta$. Como φ es único tal que $\mathsf{Ker}(f)\alpha = \mathsf{Ker}(f)\varphi$ y tanto α como β lo cumplen, $\alpha = \beta$ y el núcleo es monomorfismo.
   Por dualidad, todo conúcleo es epimorfismo.

2. Sean $k : K \longrightarrow A$ y $k_1 : K' \longrightarrow A$ dos núcleos de un mismo morfismo $f : A \longrightarrow B$. Tenemos que ver que k factoriza por k' y que k' factoriza por k. Por definición de núcleo, $kf = 0$ y $k'f = 0$. Aplicando la propiedad universal de k' como núcleo de f, existe un único morfismo $\varphi : K \longrightarrow K'$ tal que $k = k'\varphi$. Simétricamente, existe un único morfismo $\psi : K' \longrightarrow K$ tal que $k' = k\psi$. Por tanto, k y k' son monomorfismos equivalentes. Además, $k = k\psi\varphi$ y $k' = k'\varphi\psi$. Por unicidad y dada la existencia de los morfismos identidad, debe ser $\psi\varphi = 1_K$ y $\varphi\psi = 1'_K$ con lo que φ es isomorfismo y los núcleos son únicos salvo isomorfismo único.
   Por dualidad, se tiene el resultado para conúcleos.

3. Sea $0_{A\mathbf{0}} : A \longrightarrow \mathbf{0}$. Veamos que $0_{A\mathbf{0}}$ tiene núcleo y es $\mathsf{Ker}(0_{A\mathbf{0}}) = 1_A$. Claramente, $0_{A\mathbf{0}}1_A = 0_{A\mathbf{0}}$. Suponemos que existe $h : C \longrightarrow A$ tal que $0_{A\mathbf{0}}h = 0_{C\mathbf{0}}$. Por la definición de morfismo identidad, h es el único morfismo tal que $1_A h = h$ con lo que 1_A es núcleo de $0_{A\mathbf{0}}$.
   Por dualidad, 1_B es conúcleo de $0_{\mathbf{0}B} : \mathbf{0} \longrightarrow B$.

4. Por dualidad, es suficiente con probar que $f : A \longrightarrow B$ monomorfismo implica $\mathsf{Ker}(f) = 0_{\mathbf{0}A}$. Es claro que $f0_{\mathbf{0}A} = 0_{\mathbf{0}B}$. Suponemos ahora que existe un morfismo $g : C \longrightarrow A$ tal que $fg = 0_{C\mathbf{0}}$. Por definición de objeto cero, existe un único morfismo $0_{C\mathbf{0}} : C \longrightarrow \mathbf{0}$. Vemos que este morfismo nos da la propiedad universal del núcleo, es decir, que $g = 0_{\mathbf{0}A}0_{C\mathbf{0}}$. porque f. Tenemos que $fg = 0_{CB} = f0_{\mathbf{0}A}0_{C\mathbf{0}}$ y como f es monomorfismo, $g = 0_{\mathbf{0}A}0_{C\mathbf{0}}$.

5. Por dualidad, es suficiente con probarlo para f morfismo con núcleo y g monomorfismo. Es claro que $gf\mathsf{Ker}(f) = 0$. Suponemos ahora que existe un morfismo $h : Z \longrightarrow A$ tal que $gfh = 0_{ZC}$. Entonces tenemos $gfh = 0_{CZ} = g0_{ZB}$ y como g es monomorfismo se anula a izquierda, $fh = 0$. Por la propiedad universal del núcleo, existe un único morfismo $\varphi : Z \longrightarrow \mathsf{Ker}\, f$ tal que $h = \mathsf{Ker}(f)\varphi$ con lo que se tiene la propiedad universal y $\mathsf{Ker}(f)$ es núcleo de gf.

$\square$

Gracias al lema anterior, obtenemos una cierta unicidad para los núcleos y conúcleos porque determinan un único subobjeto. A partir de ahora nos referiremos al núcleo de un morfismo como único siempre que exista entendiendo que cualquier otro núcleo sera un monomorfismo equivalente. De la misma manera trataremos a los conúcleos y al resto de construcciones dadas por subobjetos u objetos cociente.

Recuperamos un resultado conocido en álgebra a partir del lema anterior y que también aplicaremos más adelante.

Proposición 1.3.9. *Sea un anillo R y $f : M \longrightarrow N$ un morfismo de R-módulos. Se cumplen en la categoría ${}_R\mathbf{Mod}$:*

1. *f es monomorfismo si y solo si f es morfismo inyectivo.*
2. *f es epimorfismo si y solo si f es morfismo sobreyectivo.*

Demostración.

1. $\Longleftarrow$ Si es morfismo inyectivo, entonces es morfismo y se cancela a izquierda para toda aplicación, en particular, también para todo morfismo y, por definición, es monomorfismo.

   $\Longrightarrow$ Suponemos $f : M \longrightarrow N$ monomorfismo. Por la proposición anterior, su núcleo es el morfismo cero $0 : \mathsf{Ker}\, f \longrightarrow M$, en particular, $\mathsf{Ker}\, f = \mathbf{0}$ y, claramente, f es inyectiva porque si $m, n \in M$ tales que $f(m) = f(n)$, entonces $f(m-n) = f(m) - f(n) = 0$ y $m - n = 0$.

2. $\Longrightarrow$ Si es morfismo sobreyectivo, entonces es morfismo y se cancela a derecha por toda aplicación y, en particular, también para todo morfismo con lo que es epimorfismo por definición. $\Longleftarrow$ Suponemos $f : M \longrightarrow N$ epimorfismo. Por la proposición anterior, su conúcleo es el morfismo cero $0 : N \longrightarrow \mathsf{Coker}\, f$, en particular, $\mathsf{Coker}\, f = N/f(M) = \mathbf{0}$ con lo que $N = f(M)$ y f es sobreyectiva.

□

Definición 1.3.10. Sea $f : A \longrightarrow B$ un morfismo en una categoría $\mathscr{C}$.
La **imagen** de f es el menor subobjeto $\mathsf{Im}(f) : \mathsf{Im}\, f \longrightarrow B$ de B por el que factoriza f. Dualmente, la **coimagen** de f es el mayor objeto cociente $\mathsf{Coim}(f) : A \longrightarrow \mathsf{Coim}\, f$ de A por el que factoriza f.

En la siguiente sección daremos ejemplos de imágenes y coimágenes en las categorías de R-módulos.

1.4. Normalidad

En esta sección relacionamos los conceptos de monomorfismo y epimorfismo con los de núcleo y conúcleo lo que da lugar a la normalidad y conormalidad, propiedades de toda categoría abeliana.

Proposición 1.4.1. *Sea $\alpha : K \longrightarrow A$ un morfismo en una categoría con objeto cero $\mathbf{0}$. Si α es núcleo de algún morfismo y tiene conúcleo, α es núcleo de su conúcleo. Dualmente, si $\alpha : B \longrightarrow C$ es conúcleo de un morfismo y tiene núcleo, α es conúcleo de su núcleo.*

Demostración. Sea $f : A \longrightarrow B$ morfismo y $\mathsf{Ker}(f) : \mathsf{Ker}\, f \longrightarrow A$ un núcleo de f con conúcleo $\mathsf{Coker}(\mathsf{Ker}(f)) : A \longrightarrow C$. Por definición de conúcleo, $\mathsf{Coker}(\mathsf{Ker}(f))\mathsf{Ker}(f) = 0$. Falta probar la propiedad universal. Suponemos que existe un morfismo $v : Z \longrightarrow A$ con $\mathsf{Coker}(\mathsf{Ker}(f))v = 0$. Tenemos que ver que existe un único morfismo $s : \mathsf{Ker}\, f \longrightarrow Z$ tal que $\mathsf{Ker}(f) = vs$. Por la propiedad universal del conúcleo, existe un único morfismo $q : C \longrightarrow B$ tal que $f = q\mathsf{Coker}(\mathsf{Ker}(f))$.
Tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Ker}\, f \arrow[rr] & & A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & B \\
& Z \arrow[ur, "v"'] & & C \arrow[ur, dotted, "!q"'] &
\end{tikzcd}.$$

Se cumple que $fv = q\mathsf{Coker}(\mathsf{Ker}(f))v = q0 = 0$. Por la propiedad universal del núcleo de f, existe un único morfismo $s : \mathsf{Ker}\, f \longrightarrow Z$ tal que $\mathsf{Ker}(f) = vs$ y $\mathsf{Ker}(f)$ es núcleo de su conúcleo.
El caso del núcleo se tiene por dualidad. □

Definición 1.4.2. Sea una categoría $\mathscr{C}$ con objeto cero. Decimos que $\mathscr{C}$ es **normal** si todo monomorfismo es núcleo de algún morfismo. Dualmente, decimos que $\mathscr{C}$ es **conormal** si todo epimorfismo es conúcleo de algún morfismo.

Aplicando la proposición anterior tenemos que, equivalentemente, una categoría es normal si y solo si todo monomorfismo es núcleo de su conúcleo y que una categoría es conormal si y solo si todo epimorfismo es conúcleo de su núcleo. Visto esto, probamos que ${}_R\mathbf{Mod}$ es normal y conormal para todo anillo R.

Ejemplo 1.4.3.

1. ${}_R$**Mod es normal**
   Sea R un anillo y $f : M \longrightarrow N$ un monomorfismo de R-módulos. Sabemos por la Proposición 1.4.1 que si es núcleo, entonces lo es de su conúcleo. Veamos entonces que $f = \mathsf{Ker}(\mathsf{Coker}(f))$. Sabemos que $\mathsf{Coker}(f) = N/f(M)$ y el morfismo es la proyección. Claramente, $\mathsf{Coker}(f)f = 0$. Tenemos que ver que se cumple la propiedad universal. Suponemos que existe un morfismo $g : Z \longrightarrow \mathsf{Coker}\, f$ tal que $\mathsf{Coker}(f)g = 0$, es decir, que se tiene $\pi(g(z)) = g(z) + f(M) = 0$ para todo $z \in Z$. Como f es monomorfismo, para cada $z \in Z$, existe un único $m_z \in M$ tal que $f(m_z) = g(z)$. Con esto podemos definir una única aplicación $\varphi : Z \longrightarrow M$, $z \longmapsto \varphi(z) = m_z$ que cumple $g = f\varphi$. Claramente φ es un morfismo de R-módulos. y se cumple entonces la propiedad universal. Por tanto, f es el núcleo de su conúcleo y ${}_R\mathbf{Mod}$ es normal.

2. ${}_R$**Mod es conormal**
   Como en el apartado anterior, sea R un anillo y $f : M \longrightarrow N$ un epimorfismo de R-módulos. Sabemos por la Proposición 1.4.1 que si es conúcleo, entonces lo es de su núcleo. Tenemos que ver que $f = \mathsf{Coker}(\mathsf{Ker}(f))$. Por construcción, $\mathsf{Ker}\, f = f^{-1}(0)$ y el morfismo es la inclusión. Sabemos que $f\mathsf{Ker}(f) = 0$. Falta comprobar la propiedad universal. Suponemos que existe un morfismo de R-módulos $g : M \longrightarrow Z$ tal que $g\mathsf{Ker}(f) = 0$, es decir, $g(\iota(x)) = g(x) = 0$ para todo $x \in \mathsf{Ker}\, f$. Como f es epimorfismo de R-módulos, f es sobreyectiva y, para todo $n \in N$, podemos escoger por el axioma de elección un elemento $m_n \in M$ tal que $f(m_n) = n$. Esto nos permite definir la aplicación $\psi : N \longrightarrow Z$, $n \longmapsto g(m_n)$ que es morfismo de R-módulos. Además, $g = \psi f$ por construcción y está bien definida, pues si $f(a) = f(b) = x$, entonces $a - b \in \mathsf{Ker}\, f$ y $g(a - b) = 0$, por lo que $\psi(x) = g(a) = g(b)$. La unicidad del morfismo se deduce de las ecuaciones o usando que f es epimorfismo porque si existe otro ψ' tal que $g = \psi' f$, entonces $\psi f = g = \psi' f$ y $\psi = \psi'$.

El siguiente resultado nos permitirá probar que las categorías abelianas son equilibradas.

Proposición 1.4.4. *Sea $f : A \longrightarrow B$ un morfismo en una categoría $\mathscr{C}$ con objeto cero* 0.
Si $\mathscr{C}$ es normal y f es un monomorfismo con conúcleo cero $\mathsf{Coker}\, f = \mathbf{0}$*, entonces f es isomorfismo. En particular, toda categoría normal es equilibrada.*
Si $\mathscr{C}$ es conormal y f es un epimorfismo con núcleo cero $\mathsf{Ker}\, f = \mathbf{0}$*, entonces f es isomorfismo. En particular, toda categoría conormal es equilibrada.*

Demostración. Como $\mathscr{C}$ es normal y f es monomorfismo, f es núcleo de algún morfismo. Por la proposición anterior, f es núcleo de su conúcleo. Pero $\mathsf{Coker}(f) : B \longrightarrow \mathbf{0}$ es conúcleo de la identidad 1_B.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r] & \mathbf{0} \\ & B \arrow[ul, dotted, "!g"] \arrow[u, "1_B"'] & \end{tikzcd}$$

La identidad también es núcleo del conúcleo de f por ser monomorfismo y, por la propiedad universal del núcleo, existe un único morfismo $g : B \longrightarrow A$ tal que $fg = 1_B$. Por tanto, f es retracción y monomorfismo por lo que es isomorfismo.
El resto de la demostración se sigue por dualidad. $\square$

Teorema 1.4.5. *Sea $f : A \longrightarrow B$ un morfismo en una categoría con objeto cero, núcleos, conúcleos, normal y conormal. Se cumplen*

$$\mathsf{Im}\,(f) = \mathsf{Ker}\,(\mathsf{Coker}\,(f)) \qquad\qquad \mathsf{Coim}\,(f) = \mathsf{Coker}\,(\mathsf{Ker}\,(f))$$

Demostración. Sea $f : A \longrightarrow B$ un morfismo en una categoría abeliana. Veamos que la imagen de f es el núcleo de su conúcleo. Por definición de imagen, tenemos que probar que $\mathsf{Ker}\,(\mathsf{Coker}\,(f))$ es el menor subobjeto de B por el que factoriza f.
Sabemos por definición que $\mathsf{Coker}\,(f)\,\mathsf{Ker}\,(\mathsf{Coker}\,(f)) = 0$ y también $\mathsf{Coker}\,(f)\,f = 0$. Por la propiedad universal del núcleo, existe un único morfismo $\eta : A \longrightarrow K$ tal que $f = \mathsf{Ker}\,(\mathsf{Coker}\,(f))\,\eta$. Por tanto, f factoriza por $\mathsf{Coker}\,(\mathsf{Ker}(f))$.
Suponemos ahora que existe $\alpha : S \longrightarrow B$ subobjeto de B por el que f factoriza, es decir, existe $\beta : A \longrightarrow B$ tal que $f = \alpha\beta$. Tenemos que probar que $\mathsf{Ker}\,(\mathsf{Coker}\,(f)) \leq \alpha$, es decir, $\mathsf{Ker}(\mathsf{Coker}(f))$ factoriza por α. Se cumple que $\mathsf{Coker}\,(f)\,f = 0$ y también $\mathsf{Coker}\,(\alpha)\,f = \mathsf{Coker}\,(\alpha)\,\alpha\beta = 0\beta = 0$. Por la propiedad universal del conúcleo, existe un único $\psi : \mathsf{Coker}\,f \longrightarrow \mathsf{Coker}\,\alpha$ tal que $\mathsf{Coker}\,(\alpha) = \psi\mathsf{Coker}\,(f)$. Ahora, como $\alpha : S \longrightarrow B$ es un subobjeto, $\alpha = \mathsf{Ker}\,(\mathsf{Coker}\,(\alpha))$ por ser monomorfismo. Tenemos que $\mathsf{Coker}\,(\alpha)\,\mathsf{Ker}\,(\mathsf{Coker}\,(f)) = \psi\mathsf{Coker}\,(f)\,\mathsf{Ker}\,(\mathsf{Coker}\,(f)) = \psi 0 = 0$. Por la propiedad universal del núcleo, existe un único $\varphi : K \longrightarrow S$ tal que $\mathsf{Ker}\,(\mathsf{Coker}\,(f)) = \alpha\varphi$.

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathsf{Coker}\,\alpha & \\
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\beta"'] \arrow[ddr, dotted, bend right, "\eta"'] & & B \arrow[ur] \arrow[rr] & & \mathsf{Coker}\,f \arrow[ul, dotted, "!\psi"'] \\
 & S \arrow[ur, "\alpha"'] & & & \\
 & K \arrow[u, dotted, "!\varphi"] \arrow[uur, bend right] & & &
\end{tikzcd}$$

Por tanto, $\mathsf{Im}\,(f) = \mathsf{Ker}\,(\mathsf{Coker}\,(f))$ y, por dualidad, $\mathsf{Coim}\,(f) = \mathsf{Coker}\,(\mathsf{Ker}\,(f))$. $\square$

Como aplicación del teorema anterior y, damos las construcciones de las imágenes y coimágenes de morfismos de R-módulos.

Ejemplo 1.4.6. Sea $f : A \longrightarrow B$ un morfismo de R-módulos para un cierto anillo R. Podemos calcular las imágenes y las coimágenes de f a partir de las construcciones conocidas de los núcleos y conúcleos

1. **Imágenes en $_R$Mod**
   Sabemos que la proyección $\pi : B \longrightarrow B/f(A)$ es el conúcleo de f. Ahora, el núcleo de π es la contraimagen del cero

   $$\pi^{-1}(0) = \{b \in B : b + f(A) = 0\} = \{b \in B : b \in f(A)\} = f(A)$$

   y el morfismo es la inclusión con lo que $\mathsf{Im}(f) : f(A) \longrightarrow B$ como era de esperar.

2. **Coimágenes en $_R$Mod**
   Sabemos que la inclusión $\iota : f^{-1}(0) \longrightarrow A$ es el núcleo de f. Ahora, el conúcleo de ι es la proyección $\mathsf{Coker}(\iota) : A \longrightarrow A/\left(\iota(f^{-1}\,(0)\right) = A/f^{-1}(0) = A/\mathsf{Ker}\,f$ como era de esperar.

Capítulo 2

Categorías abelianas

Con la teoría introducida en el capítulo anterior podemos definir y estudiar las categorías abelianas. Existen numerosas definiciones equivalentes en la bibliografía. La mayoría de ellas exige que los conjuntos de morfismos tengan una estructura de grupo de manera que la composición de morfismos sea bilineal respecto a la operación de grupo lo que se conoce como estructura aditiva. Sin embargo, hemos escogido una definición que, a simple vista, es más sencilla porque no requiere esta estructura.

Veremos en este capítulo que ${}_R\mathbf{Mod}$ es una categoría abeliana para cada anillo R y que las categorías abelianas generalizan propiedades de esta categoría. Por ejemplo, veremos una generalización del primer teorema de isomorfía. Además, construiremos la estructura aditiva a partir de nuestra definición y probaremos que es única.

2.1. Definición y propiedades

Definición 2.1.1. Decimos que una categoría $\mathscr{C}$ es **abeliana** si cumple:

1. Tiene objeto cero $\mathbf{0}$.
2. Para cada $X, Y \in |\mathscr{C}|$, existen $X \prod Y$ y $X \coprod Y$.
3. Todo morfismo tiene núcleo y conúcleo.
4. Es normal y conormal.

Observamos que la definición de categoría abeliana es autodual, es decir, si una categoría es abeliana, entonces su dual también es abeliana. Esto es consecuencia de que cada condición se sigue cumpliendo al dualizar. El dual del objeto cero es el objeto cero, el dual del producto es el coproducto, el del núcleo es el conúcleo y el de normal es conormal.

Como la definición de categoría abeliana es autodual, si un teorema es cierto para todas las categorías abelianas, entonces el teorema dual es cierto también para todas las categorías abelianas.

Ejemplo 2.1.2. ${}_R\mathbf{Mod}$ es una categoría abeliana para todo anillo R. En particular, $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ para todo cuerpo $\mathbb{K}$ y $\mathbf{Ab}$ son abelianas y también lo son las duales ${}_R\mathbf{Mod}^0$, $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}^0$ y $\mathbf{Ab}^0$.
En el Ejemplo 1.2.11 hemos visto que tiene objeto cero, en el Ejemplo 1.3.2 que tiene productos y coproductos de todos los pares de objetos, en el Ejemplo 1.3.7 que todos los morfismos tienen núcleos y conúcleos y en el Ejemplo 1.4.3 que es normal y conormal.
La categoría $\mathbf{Mod}_R$ también es una categoría abeliana.

Ejemplo 2.1.3. A partir del Ejemplo 1.2.11, vimos que las categorías **Set**, **Ring** y **Top** no tienen objeto cero por lo que no son abelianas y tampoco lo pueden ser sus duales.

El primer resultado que probamos es una generalización del primer de isomorfía en ${}_R\mathbf{Mod}$. Lo necesitaremos más adelante.

Teorema 2.1.4. ***Primer teorema de isomorfía.*** *Sea $f : A \longrightarrow B$ un morfismo en una categoría abeliana $\mathscr{C}$. Sabemos que f factoriza por su imagen, es decir, que existe un morfismo $\varphi : A \longrightarrow \mathsf{Im}\, f$ tal que $f = \mathsf{Im}(f)\varphi$. En estas condiciones, φ es único y es conúcleo del núcleo de f, es decir, una coimagen de f. Dualmente, f factoriza por su coimagen, es decir, existe un morfismo $\psi : \mathsf{Coim}\, f \longrightarrow B$. En estas condiciones, ψ es único y es núcleo del conúcleo de f, es decir, una imagen de f. Además, existe un único isomorfismo $\overline{f} : \mathsf{Coim}\, f \longrightarrow \mathsf{Im}\, f$ tal que f es la composición*

$$A \longrightarrow \mathsf{Coim}\, f \xrightarrow{\overline{f}} \mathsf{Im}\, f \longrightarrow B\ .$$

Demostración. Como $\mathscr{C}$ es una categoría abeliana, tiene núcleos y conúcleos por lo que tenemos el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Ker}\, f \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \arrow[r] & \mathsf{Coker}\, f \\ & \mathsf{Coim}\, f & \mathsf{Im}\, f \arrow[u] & \end{tikzcd} .$$

Veamos que f factoriza de manera única por su imagen. Sabemos por la definición de imagen, que existe un morfismo $\varphi : A \longrightarrow \mathsf{Im}\, f$ tal que $f = \mathsf{Im}(f)\varphi$. Además φ es único porque $\mathsf{Im}(f)$ es monomorfismo. Por dualidad, existe un único morfismo $\psi : \mathsf{Coim}\, f \longrightarrow B$ tal que $f = \psi\mathsf{Coim}(f)$. Aplicando de nuevo que las imágenes son monomorfismos

$$\mathsf{Im}(f)\varphi\mathsf{Ker}(f) = 0 = \mathsf{Im}(f)0 \longrightarrow \varphi\mathsf{Ker}(f) = 0.$$

Por la propiedad universal del conúcleo, existe un único morfismo $\overline{f}_1 : \mathsf{Coim}\, f \longrightarrow \mathsf{Im}\, f$ tal que $\varphi = \overline{f}_1\mathsf{Coim}(f)$. Por dualidad, existe un único morfismo $\overline{f}_2 : \mathsf{Coim}\, f \longrightarrow \mathsf{Im}\, f$ tal que $\psi = \mathsf{Coim}(f)\overline{f}_2$.

Necesariamente $\overline{f}_1 = \overline{f}_2$ ya que $\mathsf{Im}(f)\overline{f}_1\mathsf{Coim}(f) = \mathsf{Im}(f)\overline{f}_2\mathsf{Coim}(f)$ y la imagen es monomorfismo y la coimagen epimorfismo.

Tomando $\overline{f}_1 = \overline{f} = \overline{f}_2$, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Ker}\, f \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d] \arrow[dr, dotted, "\varphi"] & B \arrow[r] & \mathsf{Coker}\, f \\ & \mathsf{Coim}\, f \arrow[r, dotted, "\overline{f}"'] \arrow[ur, dotted, "\psi"] & \mathsf{Im}\, f \arrow[u] & \end{tikzcd} .$$

Veamos que $\mathsf{Ker}(f)$ es el núcleo de φ. Sabemos que $\varphi\mathsf{Ker}(f) = 0$. Suponemos que existe un morfismo $p : C \longrightarrow A$ tal que $\varphi p = 0$. Tenemos que probar que existe un único morfismo $p' : C \longrightarrow \mathsf{Ker}\, f$ tal que $p = \mathsf{Ker}(f)p'$. Componiendo φp con la imagen tenemos $\mathsf{Im}(f)\varphi p = fp = 0$. Por la propiedad universal del núcleo, existe un único morfismo $p' : C \longrightarrow \mathsf{Ker}\, f$ tal que $p' = \mathsf{Ker}(f)p$ por lo que el núcleo de f es núcleo de φ. Como todo núcleo es monomorfismo y todo monomorfismo es núcleo de su conúcleo, φ es conúcleo del núcleo de f y es epimorfismo. De manera dual, $\mathsf{Coker}(f)$ es el conúcleo de ψ.

Falta probar que $\overline{f}$ es isomorfismo. Como φ es epimorfismo y $\varphi = \overline{f}\mathsf{Coim}(f)$ con $\mathsf{Coim}(f)$ epimorfismo, $\overline{f}$ es epimorfismo. Dualmente, $\overline{f}$ es monomorfismo.

$\overline{f}$ es isomorfismo por ser monomorfismo y epimorfismo en una categoría abeliana. □

Observamos que es, efectivamente, una generalización del primer teorema de isomorfía. Si $f : A \longrightarrow B$ es un morfismo de R-módulos, tenemos que

$$A/\mathsf{Ker}\, f \cong f(A)$$

que es lo mismo que decir que la coimagen de f es isomorfa a la imagen de f.

Los siguientes resultados van encaminados a probar que el producto y el coproducto de dos objetos en una categoría abeliana son isomorfos. Para ello, probamos que dados dos subobjetos de un objeto, existe el subobjeto intersección que, como sabemos, es el más grande menor que cada uno de los subobjetos.

Teorema 2.1.5. *En una categoría abeliana todo par de subobjetos de un objeto tiene intersección.*

Demostración. Sean $f : A \longrightarrow C$, $g : B \longrightarrow C$ dos subobjetos de un objeto C en una categoría abeliana. Buscamos el mayor subobjeto de C menor que f y g. Vamos a probar que la intersección de f y g es $\mathsf{Ker}\,(\mathsf{Coker}\,(g)\,f)$. Como g es monomorfismo, es el núcleo de su conúcleo, $B = \mathsf{Ker}\,(\mathsf{Coker} g)$. Tenemos además que $\mathsf{Coker}\,(g)\,g = 0$ y también $\mathsf{Coker}\,(g)\,f\mathsf{Ker}\,(\mathsf{Coker}\,(g)\,f) = 0$. Por la propiedad universal del núcleo, existe un único $\varphi : \mathsf{Ker}\,(\mathsf{Coker}\,(g)\,f) \longrightarrow B$ tal que $g\varphi = f\mathsf{Ker}\,(\mathsf{Coker}\,(g)\,f)$.

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Ker}\,(\mathsf{Coker}\,(g)\,f) \arrow[r] \arrow[d, dotted, "!\varphi"'] & A \arrow[d, "f"] & \\
B \arrow[r, "g"'] & C \arrow[r] & \mathsf{Coker}\, g
\end{tikzcd}$$

Suponemos ahora que existen $z : Z \longrightarrow C$ subobjeto de C y $z_A : Z \longrightarrow A$, $z_B : Z \longrightarrow B$ tales que $fz_A = gz_B$. Componiendo con $\mathsf{Coker}\,(g)$, tenemos $\mathsf{Coker}\,(g)\,fz_A = \mathsf{Coker}\,(g)\,gz_B = 0$. Por la propiedad universal del núcleo, existe un único morfismo $\psi : Z \longrightarrow \mathsf{Ker}\,(\mathsf{Coker}\,(g)\,f)$ tal que $z_A = \mathsf{Ker}\,(\mathsf{Coker}\,(g)\,f)\,\psi$. Tenemos que probar que $z_B = \varphi\psi$. Se cumple que

$$g\varphi\psi = f\mathsf{Ker}\,(\mathsf{Coker}\,(g)\,f)\,\psi = gz_B.$$

Como g es monomorfismo, $z_B = \varphi\psi$. Por tanto, $\mathsf{Ker}\,(\mathsf{Coker}\,(g)\,f)$ es la intersección de f y g. □

Definimos ahora los conceptos de sucesión exacta y sucesión exacta corta. Por ahora solo nos servirán para caracterizar ciertas propiedades sobre núcleos, monomorfismos, imágenes y sus duales. En el capítulo siguiente relacionaremos todo esto con los funtores.

Definición 2.1.6. Una sucesión de morfismos

$$\cdots \xrightarrow{f_{i-1}} A_i \xrightarrow{f_i} A_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots$$

en una categoría abeliana es una **sucesión exacta** si $\mathsf{Im}\,(f_i) = \mathsf{Ker}\,(f_{i+1})$ para todo i. Una sucesión exacta de la forma

$$\mathbf{0} \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow \mathbf{0}$$

se denomina **sucesión exacta corta**.

Proposición 2.1.7. *Sea una categoría abeliana.*

1. $\mathbf{0} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B$ *es exacta si y solo si* f *es monomorfismo y si y solo si* $\mathsf{Ker}(f) = 0_{0A}$.

2. $A \xrightarrow{f} B \longrightarrow \mathbf{0}$ *es exacta si y solo si* f *es epimorfismo y si y solo si* $\mathsf{Im}(f) = 1_B$.

3. $\mathbf{0} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \longrightarrow \mathbf{0}$ *exacta si y solo si* f *es isomorfismo y si y solo si* $\mathsf{Ker}(f) = 0_{0A}$ *e* $\mathsf{Im}(f) = 1_B$.

4. $\mathbf{0} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ *es exacta si y solo si* $\mathsf{Ker}(g) = f$

5. $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \mathbf{0}$ *es exacta si y solo si* $\mathsf{Coim}(f) = g$.

6. $\mathbf{0} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \mathbf{0}$ *es exacta corta si y solo si* f *es monomorfismo,* g *es epimorfismo e* $\mathsf{Im}(f) = \mathsf{Ker}(g)$.

Demostración. Se prueba directamente aplicando las definiciones. □

Corolario 2.1.8. *Si* $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ *es una sucesión exacta en una categoría abeliana, se tienen* $gf = 0$ *y* $\mathsf{Coker}(f)\mathsf{Ker}(g) = 0$

Demostración. Por ser exacta, $\mathsf{Ker}(g) = \mathsf{Im}(f)$. Sabemos que todo morfismo factoriza por su imagen con lo que existe un morfismo α tal que $f = \mathsf{Im}(f)\alpha$ y $gf = g\mathsf{Im}(f)\alpha = g\mathsf{Coker}(g)\alpha = 0\alpha = 0$. Para la otra igualdad, $\mathsf{Coker}(f)\mathsf{Ker}(g) = \mathsf{Coker}(g)\mathsf{Im}(f) = \mathsf{Coker}(f)\mathsf{Ker}(\mathsf{Coker}(f)) = 0$. □

En el siguiente resultado y en los sucesivos vamos a utilizar la representación matricial de los morfismos. Conviene recordar la notación introducida en la Observación 1.3.4.

Lema 2.1.9. *Sean A, B objetos en una categoría abeliana y $(A\prod B, \pi_A, \pi_B)$, $(A\coprod B, \iota_A, \iota_B)$ su producto y coproducto respectivamente. Se cumplen las siguientes igualdades:*

$$\begin{aligned}\mathsf{Ker}\,(\pi_A) &= \begin{pmatrix}0_{BA}\\ 1_A\end{pmatrix} \\ \mathsf{Ker}\,(\pi_B) &= \begin{pmatrix}1_B\\ 0_{AB}\end{pmatrix}\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\mathsf{Coker}\,(\iota_A) &= \begin{pmatrix}0_{AB} & 1_B\end{pmatrix}\\ \mathsf{Coker}\,(\iota_B) &= \begin{pmatrix}1_A & 0_{BA}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Demostración. Por simetría y dualidad basta con probar que $\mathsf{Coker}\,(\iota_A) = \begin{pmatrix}0_{AB} & 1_B\end{pmatrix}$. Claramente se tiene que $\begin{pmatrix}0_{AB} & 1_B\end{pmatrix}\iota_A = 0_{AB}$. Supongamos que existe $f : A\coprod B \longrightarrow C$ tal que $f\iota_A = 0$. Podemos ver f como $\begin{pmatrix}0_{AC} & f\iota_B\end{pmatrix}$. Tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & C \\
A \arrow[r, "\iota_A"] \arrow[urr, bend left, "\mathbf{0}"] & A\coprod B \arrow[r, "\begin{pmatrix}0_{AB} & 1_B\end{pmatrix}"'] \arrow[ur, "f"] & B \arrow[u, dotted, "!f\iota_B"']
\end{tikzcd}$$

donde $f\iota_B : B \longrightarrow C$ es el único morfismo que cumple $f\iota_B\begin{pmatrix}0_{AB} & 1_B\end{pmatrix} = f = \begin{pmatrix}0_{AB} & f\iota_B\end{pmatrix}$ porque

$$f\iota_B\begin{pmatrix}0_{AB} & 1_B\end{pmatrix}\iota_A = f\iota_B 0_{AB} = 0_{AC} \qquad \iota_B\begin{pmatrix}0_{AB} & 1_B\end{pmatrix}\iota_B = f\iota_B 1_B = f\iota_B.$$

Por tanto, $\begin{pmatrix}0_{AB} & 1_B\end{pmatrix}$ es el conúcleo de ι_A. □

Proposición 2.1.10. *Sean A, B dos objetos y $(A\coprod B, \iota_A, \iota_B)$ su coproducto. La intersección de los subobjetos $\iota_A : A \longrightarrow A\coprod B$ y $\iota_B : B \longrightarrow A\coprod B$ es el morfismo cero $0_{\mathbf{0}A\coprod B} : \mathbf{0} \longrightarrow A\coprod B$.*

Demostración. Por la proposición anterior, la intersección está dada por $\mathsf{Ker}\,(\mathsf{Coker}\,(\iota_B)\,\iota_A)$. Aplicando el lema previo, lo tenemos:

$$\mathsf{Ker}\,(\mathsf{Coker}\,(\iota_B)\,\iota_A) = \mathsf{Ker}\left(\begin{pmatrix}1_A & 0_{BA}\end{pmatrix}\iota_A\right) = \mathsf{Coker}\,(1_A) = 0_{\mathbf{0}A\coprod B}.$$

□

Con lo anterior ya podemos demostrar que los productos y los coproductos de dos objetos son isomorfos.

Teorema 2.1.11. *Sean A, B objetos en una categoría abeliana. El producto $A\prod B$ y el coproducto $A\coprod B$ son isomorfos.*

Demostración. Consideramos el morfismo $F = \begin{pmatrix}1_A & 0_{BA}\\ 0_{AB} & 1_B\end{pmatrix} : A\coprod B \longrightarrow A\prod B$. Vamos a probar que es isomorfismo. Veamos que su núcleo es cero. Componiendo con el núcleo y con π_B, obtenemos el morfismo cero

$$\mathsf{Ker}\,F \longrightarrow A\coprod B \longrightarrow A\prod B \longrightarrow B.$$

Tenemos que $\pi_B F = \begin{pmatrix}0_{AB} & 1_B\end{pmatrix}$. Como ι_A es monomorfismo, es núcleo de su conúcleo que, por el resultado anterior, es $\begin{pmatrix}0_{AB} & 1_B\end{pmatrix}$. Por la propiedad universal del núcleo, existe un único morfismo $\varphi : \mathsf{Ker}\,f \longrightarrow A$ de manera que $\mathsf{Ker}\,(f) = \iota_A\varphi$. $\mathsf{Ker}\,(f)$ está contenido en ι_B como subobjeto de $A\coprod B$. Análogamente se tiene que $\mathsf{Ker}\,(f)$ está contenido en ι_A como subobjeto de $A\coprod B$. Por definición de intersección, $\mathsf{Ker}\,(f)$ está contenido en la intersección, que es cero por el resultado anterior. Por tanto, $\mathsf{Ker}\,(f) = 0$ y F es monomorfismo.
Por dualidad, F es epimorfismo y, por tanto, isomorfismo. □

Como aplicación de la isomorfía, tenemos la construcción siguiente.

Observación 2.1.12. Podemos considerar $(A\bigoplus B, \pi_1, \pi_2, \iota_1, \iota_2)$, que se conoce como **suma directa**, para cada par de objetos A, B en una categoría abeliana de manera que $A\bigoplus B \cong A\prod B$ con proyecciones π_1, π_2 y $A\bigoplus B \cong A\coprod B$ con inyecciones ι_1, ι_2 y se cumplen:

$$\begin{array}{ll} \pi_1\iota_1 = 1_A & \pi_1\iota_2 = 0_{BA} \\ \pi_2\iota_1 = 0_{AB} & \pi_2\iota_2 = 1_B \end{array} .$$

Si $\bar{\iota}_A, \bar{\iota}_B$ son proyecciones para $A\bigoplus B$ tenemos, por la propiedad universal del coproducto, unos únicos morfismos π_A, π_B tales que se tienen los diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "\bar{\iota}_A"'] \arrow[drr, bend left, "1_A"] & & \\
& A\bigoplus B \arrow[r, dotted, "\pi_A"] & A \\
B \arrow[ur, "\bar{\iota}_B"] \arrow[urr, bend right, "0_{BA}"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "\bar{\iota}_A"'] \arrow[drr, bend left, "0_{AB}"] & & \\
& A\bigoplus B \arrow[r, dotted, "\pi_B"] & B \\
B \arrow[ur, "\bar{\iota}_B"] \arrow[urr, bend right, "1_B"'] & &
\end{tikzcd} .$$

Observamos que $\pi_A = \begin{pmatrix} 1_A & 0_{BA} \end{pmatrix}, \pi_B = \begin{pmatrix} 0_{AB} & 1_B \end{pmatrix}$ y que tomando $\iota_A = \bar{\iota}_A$ y $\iota_B = \bar{\iota}_B$, se cumplen las igualdades anteriores. Además por esas igualdades tenemos que $\iota_A = \begin{pmatrix} 1_A & 0_{BA} \end{pmatrix}^T$ y $\iota_B = \begin{pmatrix} 0_{AB} & 1_B \end{pmatrix}^T$.

Lo que obtenemos con esta construcción es escoger y fijar unas proyecciones y unas inyecciones de manera que la representación matricial de los morfismos es única.

2.2. Estructura aditiva

En esta sección vamos a dotar de estructura de grupo abeliano a cada conjunto de morfismos de una categoría abeliana. Además, el elemento neutro será el correspondiente morfismo cero y la composición de morfismos será bilineal respecto a la operación de grupo.

Definición 2.2.1. Sean A un objeto en una categoría abeliana, definimos los morfismos

Morfismo diagonal $\Delta = \begin{pmatrix} 1_A \\ 1_A \end{pmatrix} : A \longrightarrow A\bigoplus A$.

Morfismo suma $\nabla = \begin{pmatrix} 1_A & 1_A \end{pmatrix} : A\bigoplus A \longrightarrow A$.

Definición 2.2.2. Para cada par de morfismos $\alpha, \beta : A \longrightarrow B$ en una categoría abeliana, definimos

$$\alpha + \beta : A \xrightarrow{\Delta} A\bigoplus A \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix}} B \ .$$

$$\alpha \times \beta : A \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}} B\bigoplus B \xrightarrow{\nabla} B \ .$$

Vamos a probar que, en realidad, los morfismos de la definición anterior son iguales y que nos dan una estructura de monoide con las propiedades buscadas.

Teorema 2.2.3. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría abeliana, $A, B \in |\mathscr{C}|$ y $\alpha, \beta \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$. Se cumple que $\alpha + \beta = \alpha \times \beta$ para todos $\alpha, \beta \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ y, además, $(\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B), +)$ es un monoide en el que el morfismo cero es el elemento neutro y tal que la composición de morfismos es bilineal respecto de $+$, es decir, tal que se cumplen*

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \quad \forall \alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, C) \ \text{y} \ \forall \beta, \gamma \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$$

$$(\beta + \gamma)\alpha = \beta\alpha + \gamma\alpha \quad \forall \alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B) \ \text{y} \ \forall \beta, \gamma \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, C) .$$

Demostración. Veamos que el morfismo cero $0_{AB} : A \longrightarrow B$ es elemento neutro para $+$ y $\times$.

$$\alpha + 0 = \alpha = 0 + \alpha \qquad\qquad \alpha \times 0 = \alpha = 0 \times \alpha$$

Tenemos que $\begin{pmatrix}\alpha & 0\end{pmatrix} = \alpha\pi_A$ porque $\begin{pmatrix}\alpha & 0\end{pmatrix}\iota_A = \alpha\pi_A\iota_A = \alpha$. Entonces, por definición

$$\alpha + 0 = \alpha\pi_A \begin{pmatrix}1_A \\ 1_A\end{pmatrix} = \alpha 1_A = \alpha.$$

Análogamente se tiene el resto de igualdades.
Veamos ahora que para todos $\alpha : B \longrightarrow B'$ y $\beta, \gamma : A \longrightarrow B$ se tiene

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

Se cumple que $\alpha\begin{pmatrix}\beta & \gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\beta & \alpha\gamma\end{pmatrix}$ ya que $\alpha\begin{pmatrix}\beta & \gamma\end{pmatrix}\iota_A = \alpha\beta$ y $\alpha\begin{pmatrix}\beta & \gamma\end{pmatrix}\iota_B = \alpha\gamma$.
Por tanto,

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\begin{pmatrix}\beta & \gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1_A \\ 1_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\beta & \alpha\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1_A \\ 1_A\end{pmatrix} = \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

Sean ahora $\alpha, \beta, \gamma, \delta : A \longrightarrow B$.

$$(\alpha + \beta) \times (\gamma + \delta) = \begin{pmatrix}1_B & 1_B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha + \beta \\ \gamma + \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1_B & 1_B\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1_A \\ 1_A\end{pmatrix}\right) =$$

$$= \left(\begin{pmatrix}1_B & 1_B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}1_A \\ 1_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha \times \gamma & \beta \times \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1_A \\ 1_A\end{pmatrix} = (\alpha \times \gamma) + (\beta \times \delta)$$

Si tomamos, $\alpha = 0 = \delta$, entonces $\beta \times \gamma = \beta + \gamma$ con lo que $+ = \times$. Si tomamos $\gamma = 0$, tenemos $(\alpha + \beta) + \delta = \alpha + (\beta + \delta)$ con lo que la operación es asociativa. Si tomamos, $\alpha = 0_{AB} = \delta$, entonces $\beta + \gamma = \gamma + \beta$ y la operación es conmutativa.
Hemos probado que, efectivamente, $+ = \times$ dota a $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ de estructura de monoide abeliano. $\square$

Para probar que el monoide abeliano es en realidad un grupo abeliano, falta demostrar que cada morfismo tiene un opuesto. Para hacerlo, vamos a ver primero con los lemas siguientes que el producto de matrices determina la composición de morfismos.

Lema 2.2.4. *Sean las notaciones de la observacoón anterior. Se cumple* $\iota_1\pi_1 + \iota_2\pi_2 = 1$.

Demostración. Componiendo con las inyecciones, tenemos

$$(\iota_1\pi_1 + \iota_2\pi_2)\,\iota_1 = \iota_1\pi_1\iota_1 + \iota_2\pi_2\iota_1 = \iota_1 + 0 = \iota_1$$

$$(\iota_1\pi_1 + \iota_2\pi_2)\,\iota_2 = \iota_1\pi_1\iota_2 + \iota_2\pi_2\iota_2 = 0 + \iota_2 = \iota_2.$$

Pero claramente la identidad cumple $1\iota_1 = \iota_1$ y $1\iota_2 = \iota_2$ y, por la propiedad universal del coproducto, el morfismo es único. Por tanto, $\iota_1\pi_1 + \iota_2\pi_2 = 1$. $\square$

Lema 2.2.5. *Si* $f = (f_{ij}) : A_1 \bigoplus A_2 \longrightarrow B_1 \bigoplus B_2$, $g = (g_{ij}) : B_1 \bigoplus B_2 \longrightarrow C_1 \bigoplus C_2$ *son morfismos en una categoría abeliana, el morfismo composición* $gf : A_1 \bigoplus A_2 \longrightarrow C_1 \bigoplus C_2$ *está determinado por el producto de las matrices* $(g_{ij})(f_{ij})$.

Demostración. Denotamos $h = gf$. Sabemos que h está representado por una cierta matriz de morfismos (h_{ij}). Tenemos que probar que $(h_{ij}) = (g_{ij})(f_{ij}) = (g_{i1}f_{1j} + g_{i2}f_{2j})$. Vamos a denotar las proyecciones e inyecciones con superíndices para diferenciarlas. Aplicando el teorema anterior, tenemos el morfismo identidad $\iota_1^B\pi_1^B + \iota_2^B\pi_2^B = 1$ con lo que para todos $i, j \in \{1, 2\}$,

$$\pi_i^A h\iota_j^C = \pi_i^A gf\iota_j^C = \pi_i^A g\left(\iota_1^B\pi_1^B + \iota_2^B\pi_2^B\right) f\iota_j^C = \pi_i^A g\iota_1^A\pi_1^B f\iota_j^C + \pi_i^A g\iota_2^B\pi_2^B f\iota_j^C = g_{i1}f_{1j} + g_{i2}f_{2j}$$

como queríamos probar. $\square$

Ya estamos en condiciones de demostrar la existencia de la estructura aditiva de las categorías abelianas.

Teorema 2.2.6. ***Existencia de estructura aditiva.*** *Sean A, B objetos de una categoría abeliana. El monoide abeliano* $(\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B),+)$ *es un grupo abeliano.*

Demostración. Para ver que es grupo abeliano, solo queda probar la existencia de opuesto para cada morfismo. Sea $\alpha : A \longrightarrow B$, buscamos un morfismo $\beta : A \longrightarrow B$ tal que $\alpha+\beta = 0$. Consideramos el morfismo

$$f_\alpha = \begin{pmatrix} 1_A & 0_{BA} \\ \alpha & 1_B \end{pmatrix} : A \bigoplus B \longrightarrow A \bigoplus B.$$

Si su núcleo $\mathsf{Ker}(f_\alpha) : \mathsf{Ker}\, f_\alpha \longrightarrow A \bigoplus B$ es $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}^T$, entonces la composición es cero que sabemos por el resultado anterior que está dada por el producto de las matrices por lo que debe ser $a = 0$ y $a\alpha+b = 0$ con lo que $b = 0$. Como el núcleo es cero, f_α es monomorfismo. Razonando matricialmente con el conúcleo obtenemos de la misma forma que f_α es epimorfismo y, por tanto, isomorfismo. El inverso está dado por una matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que cumple $\begin{pmatrix} 1_A & 0_{BA} \\ \alpha & 1_B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_A & 0_{BA} \\ 0_{AB} & 1_B \end{pmatrix}$. Por tanto, $a = 1_A$, $b = 0_{BA}$, $d = 1_B$, $a + c = 0_{AB}$. Y c es opuesto de α. □

Releyendo los lemas previos, deducimos que la estructura aditiva es necesariamente única.

Teorema 2.2.7. ***Unicidad de estructura aditiva.*** *Sean A, B objetos de una categoría abeliana $\mathscr{C}$. El grupo abeliano* $(\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B),+)$ *construido en el teorema anterior es la única estructura de grupo abeliano definible sobre* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$ *tal que el morfismo cero es el elemento neutro y tal que la composición de morfismos es bilineal respecto de $+$.*

Demostración. El Lema 2.2.4 y el Lema 2.2.5 se han demostrado sin utilizar la definición concreta de la suma dada en la Definición 2.2.2, sino únicamente aplicando la estructura de monoide abeliano y las propiedades respecto de la composición. Por tanto, dados A, B objetos en una categoría abeliana $\mathscr{C}$, si existe otra estructura de monoide $(\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B),\star)$ con esas propiedades, entonces podemos aplicar las tesis de estos lemas y calcular la composición de los morfismos tanto con $+$ como con $\star$. Pero entonces,

$$(\alpha \star \beta) = \begin{pmatrix} 1_A & 1_B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = (\alpha+\beta).$$

Con lo que $\star = +$ y la estructura de monoide y, por tanto, la de grupo abeliano son únicas con esas propiedades. □

Ejemplo 2.2.8.

1. Dado un objeto A de una categoría abeliana $\mathscr{C}$, por el teorema anterior, la suma y la composición de morfismos dotan al conjunto de endomorfismos $\mathrm{End}(A) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, A)$ de estructura de anillo no necesariamente conmutativo.
   Es claro que es un anillo por el teorema anterior. La no conmutatividad se deduce de que la composición de morfismos no es conmutativa. Por ejemplo, sabemos que en la categoría $\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$, los endomorfismos de $\mathbb{R}^2$, fijadas unas bases, se representan por matrices y las composiciones están dadas por el producto de matrices. Como el producto de matrices no es conmutativo, $\mathrm{End}(\mathbb{R}^2) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ no es conmutativo.

2. Todo anillo $(R, +, \cdot)$ se puede ver como un subanillo del anillo $(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(R,R), +, \circ)$ de los endomorfismos en $\mathbf{Ab}$ de su grupo abeliano subyacente $(R, +)$.
   Definimos la aplicación $\phi : R \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(R, R)$ de manera que para cada $r \in R$,

$$\begin{array}{rccc} \phi(r): & R & \longmapsto & R \\ & x & \longmapsto & rx \end{array}.$$

Vamos a probar que ϕ es un morfismo inyectivo en **Ring**.
ϕ está bien definido. Sea $r \in R$, $\phi(r)$ es un morfismo de grupos. Si $x, y \in R$, $\phi(r)(x+y) = r(x+y) = rx + ry = \phi(r)(x) + \phi(r)(y)$.
ϕ es un morfismo de anillos. Sean $r, s \in R$, tenemos que ver las igualdades de aplicaciones $\phi(r+s) = \phi(r) + \phi(s)$ y $\phi(rs) = \phi(r) \circ \phi(s)$. Dado $x \in R$,

$$\phi(r+s)(x) = (r+s)x = rx + sx = \phi(r)(x) + \phi(s)(x) = (\phi(r) + \phi(s))(x).$$

$$\phi(rs)(x) = rsx = r(sx) = \phi(r)(\phi(s)(x)) = (\phi(r) \circ \phi(s))(x).$$

ϕ es inyectivo

$$\mathsf{Ker}(\phi) = \{r \in R : \phi(r) = 0\} = \{r \in R : rx = 0 \quad \forall x \in R\} = \{r \in R : r = 0\} = \{0\}.$$

Por el primer teorema de isomorfía para anillos

$$R \cong \phi(R) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(R, R) \quad \text{en } \mathbf{Ring}.$$

Y R se puede ver como un subanillo del anillo de endomorfismos de R como grupo abeliano.

3. Dado un objeto A de una categoría abeliana $\mathscr{C}$, para todo objeto B, el grupo abeliano $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ tiene estructura de $\mathrm{End}(A)$-módulo (derecho) con la acción dada por

$$\begin{array}{cccc} \cdot : & \mathrm{End}(A) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B) \\ & (r, f) & \longmapsto & r \cdot f = fr \end{array}.$$

Para todos $r, s : R \longrightarrow R$ y todos $f, g : A \longrightarrow B$, se cumplen:

- $1_B \cdot f = f 1_B = f$.
- $r \cdot (s \cdot f) = r \cdot (fs) = (fs)\, r = f\,(sr) = (sr) \cdot f$.
- $(r+s) \cdot f = f\,(r+s) = fr + fs = r \cdot f + s \cdot f$.
- $r \cdot (f+g) = (f+g)\, r = fr + gr = r \cdot f + r \cdot g$.

4. Fijado un objeto A, el funtor $\mathrm{Hom}(A, -) : \mathscr{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$ se pude considerar como un funtor en $\mathbf{Ab}$ o en $\mathbf{Mod}_{\mathrm{End}(A)}$.
Solo hace falta ver que si $f : B \longrightarrow C$ es un morfismo en $\mathscr{C}$, entonces $\mathrm{h}^A(f) : \mathrm{Hom}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, C)$ es un morfismo de $\mathrm{End}(A)$-módulos con la estructura del apartado anterior. Si $r : A \longrightarrow A$ y $\alpha, \beta : A \longrightarrow B$ son morfismos en $\mathscr{C}$, se cumplen:

- $\mathrm{h}^A(f)(\alpha + \beta) = f(\alpha + \beta) = f\alpha + f\beta = \mathrm{h}^A(f)(\alpha) + \mathrm{h}^A(f)(\beta)$
- $\mathrm{h}^A(f)(r \cdot \alpha) = \mathrm{h}^A(f)(\alpha r) = f\alpha r = r \cdot (f\alpha) = r \cdot \mathrm{h}^A(f)(\alpha)$ que es lo que queríamos probar.

Capítulo 3

Teorema débil de Mitchell y categorías de funtores

En este capítulo vamos a demostar el teorema débil de Mitchell. Para ello, estudiamos primero funtores entre categorías abelianas. Veremos los conceptos de objeto proyectivo y generador que nos definen funtores exactos y fieles respectivamente. Con esto, podremos enunciar y demostrar el teorema débil. También explicamos cómo se aplica el teorema de Mitchell para probar teoremas sobre diagramas en cualquier categoría abeliana demostrándolos solo en las categorías de módulos.

Además, probaremos que $\mathsf{Func}(\mathscr{C}, \mathscr{D})$, la categoría de funtores entre $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$, es una categoría abeliana si $\mathscr{D}$ es abeliana. A parte de la importancia intrínseca de la construcción, comentaremos cómo se relaciona esto con el teorema de Mitchell.

Para demostrar el teorema débil, nos basamos en [5] y escribimos con más detalle su demostración.

3.1. Funtores exactos

Definición 3.1.1. Un funtor covariante F entre categorías abelianas se dice **exacto a izquierda** si transforma sucesiones exactas cortas

$$\mathbf{0} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \mathbf{0}$$

en sucesiones exactas de la forma

$$\mathbf{0} \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C)\ .$$

Análogamente, se dice que es **exacto a derecha** si transforma esas sucesiones exactas cortas en sucesiones exactas de la forma

$$F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \longrightarrow \mathbf{0}\ .$$

Vemos con el siguiente teorema que la exactitud a izquierda y derecha se pueden caracterizar por el hecho de que el funtor conmute con núcleos y con conúcleos respectivamente. Esto no es sorprendente en vista de la Proposición 2.1.7.

Teorema 3.1.2. *Sea $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ un funtor covariante entre categorías abelianas. Se cumplen:*

1. *F es exacto a izquierda si y solo si **preserva núcleos**, esto es, $F(\mathsf{Ker}(f)) = \mathsf{Ker}(F(f))$ para todo morfismo f en la categoría $\mathscr{C}$.*
2. *F es exacto a derecha si y solo si **preserva conúcleos**, esto es, $F(\mathsf{Coker}(f)) = \mathsf{Coker}(F(f))$ para todo morfismo f en la categoría $\mathscr{C}$.*

Demostración. Por dualidad, basta con probar 1.
$\Longleftarrow$ Suponemos que F preserva núcleos y vamos a ver que si

$$\mathbf{0} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \mathbf{0}$$

es una sucesión exacta corta, entonces la siguiente sucesión es exacta.

$$\mathbf{0} \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C)$$

Por la Proposición 2.1.7, esto es equivalente a probar que $\mathsf{Ker}(F(g)) = F(f)$. Como preserva núcleos, sabemos que $\mathsf{Ker}(F(g)) = F(\mathsf{Ker}(g)) = F(f)$ porque por exactitud se cumple $\mathsf{Ker}(g) = f$. Por tanto, F es efectivamente exacto a izquierda.
$\Longrightarrow$ Suponemos que F es exacto a izquierda y tomamos $f : A \longrightarrow B$ un morfismo cualquiera en $\mathscr{C}$. Vamos a ver que $F(\mathsf{Ker}(f)) = \mathsf{Ker}(F(f))$. Por el Teorema 2.1.4, tenemos las siguientes sucesiones exactas cortas

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathsf{Ker}\, f \xrightarrow{\mathsf{Ker}(f)} A \xrightarrow{\mathsf{Coim}(f)} \mathsf{Im}\, f \longrightarrow \mathbf{0}$$

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathsf{Im}\, f \xrightarrow{\mathsf{Im}(f)} B \xrightarrow{\mathsf{Coker}(f)} \mathsf{Coker}\, f \longrightarrow \mathbf{0}.$$

Como por hipótesis F es un funtor covariante exacto a izquierda, las siguientes sucesiones imagen son exactas

$$\mathbf{0} \longrightarrow F(\mathsf{Ker}\, f) \xrightarrow{F(\mathsf{Ker}(f))} F(A) \xrightarrow{F(\mathsf{Coim}(f))} F(\mathsf{Im}\, f)$$

$$\mathbf{0} \longrightarrow F(\mathsf{Im}\, f) \xrightarrow{F(\mathsf{Im}(f))} F(B) \xrightarrow{F(\mathsf{Coker}(f))} F(\mathsf{Coker}\, f).$$

Sabemos por la Proposición 2.1.7, que, en particular, se cumple que $\mathsf{Ker}(F(\mathsf{Coim}(f))) = F(\mathsf{Ker}(f))$ y el morfismo $F(\mathsf{Im}(f))$ es monomorfismo. Aplicando el Apartado 5 del Lema 1.3.8, tenemos que $F(\mathsf{Ker}(f))$ también es núcleo de la composición

$$F(\mathsf{Im}(f))F(\mathsf{Coim}(f) = F(\mathsf{Im}(f)\mathsf{Coim}(f)) = F(f)$$

que era lo que queríamos probar, $F(\mathsf{Ker}(f)) = \mathsf{Ker}(F(f))$. □

Definición 3.1.3. Un funtor covariante o contravariante entre categorías abelianas es **exacto** si transforma sucesiones exactas en sucesiones exactas.

Al igual que el teorema anterior, nos interesa el resultado siguiente que caracteriza la exactitud en términos de preservar núcleos y conúcleos.

Proposición 3.1.4. *Sea $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ un funtor covariante entre categorías abelianas. Son equivalentes:*

1. *F es exacto.*
2. *F transforma sucesiones exactas cortas en sucesiones exactas cortas.*
3. *F es exacto a izquierda y exacto a derecha.*
4. *F preserva núcleos y conúcleos.*

Demostración. $1 \Longrightarrow 2$
Dada una sucesión exacta corta

$$\mathbf{0} \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow \mathbf{0}\ ,$$

tenemos, por exactitud, que la expresión dada por las imágenes

$$F(0) \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C) \longrightarrow F(0)$$

es una sucesión exacta. Para probar que es exacta corta, solo queda ver que $F(0)$ es un objeto cero de $\mathscr{D}$. Tomamos la sucesión

$$\mathbf{0} \xrightarrow{0} A \xrightarrow{1_A} A$$

que es exacta porque $\mathsf{Ker}(1_A) = 0 = \mathsf{Im}(0)$. Como el funtor F es exacto por hipótesis, tenemos la sucesión exacta

$$F(0) \xrightarrow{F(0)} F(A) \xrightarrow{1_{F(A)}} F(A) \ .$$

Por tanto, $\mathsf{Im}(F(0)) = \mathsf{Ker}(1_F(A)) = 0$ con lo que necesariamente $F(0)$ es objeto cero.
$2 \Longrightarrow 3$
Claramente, si para toda sucesión exacta corta

$$\mathbf{0} \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow \mathbf{0}$$

tenemos que

$$\mathbf{0} \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C) \longrightarrow \mathbf{0}$$

es una sucesión exacta corta, F es exacto a izquierda y exacto a derecha.
$3 \Longrightarrow 4$
Se deduce a partir de 1 y 2 del Teorema 3.1.2.
$4 \Longrightarrow 1$
Sea una sucesión exacta cualquiera $\cdots \xrightarrow{f_{i-1}} A_i \xrightarrow{f_i} A_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots$. Tenemos que probar que $\cdots \xrightarrow{F(f_{i-1})} F(A_i) \xrightarrow{F(f_i)} F(A_{i+1}) \xrightarrow{F(f_{i+1})} \cdots$ es una sucesión exacta. Fijamos j, veamos que $\mathsf{Im}(F(f_j)) = \mathsf{Ker}(F(f_{j+1}))$. Sabemos que $\mathsf{Im}(f_j) = \mathsf{Ker}(f_{j+1})$. Aplicando F, tenemos que

$$\begin{array}{rcl} F(\mathsf{Im}(f_j)) = F(\mathsf{Ker}(f_{j+1})) & \longrightarrow & F\left(\mathsf{Ker}(\mathsf{Coker}(f_j))\right) = F(\mathsf{Ker}(f_j)) \longrightarrow \\ \longrightarrow \mathsf{Ker}(\mathsf{Coker}(F(f_j)) = \mathsf{Ker}(F(f_{j+1})) & \longrightarrow & \mathsf{Im}(F(f_j)) = \mathsf{Ker}(F(f_{j+1})). \end{array}$$

□

Vamos a ver ahora una propiedad de los funtores covariantes fieles entre categorías abelianas al estilo de la Proposición 1.1.10 que nos permitirá interpretar el teorema de Mitchell. La demostración se basa en el Corolario 2.1.8.

Proposición 3.1.5. *Un funtor covariante $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ entre categorías abelianas que preserve el objeto cero es fiel si y solo si transforma sucesiones no exactas en sucesiones no exactas.*

Demostración. Si F es fiel, y suponemos que tenemos una sucesión no exacta, en particular tendremos $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ de manera que $gf \neq 0$ o $\mathsf{Coker}(f)\mathsf{Ker}(g) \neq 0$. Claramente, si se da el primer caso, entonces la imagen $F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C)$ tampoco es exacta. Supongamos que $\mathsf{Coker}(f)\mathsf{Ker}(g) \neq 0$ y que la sucesión imagen es exacta. Podemos considerar $\mathsf{Ker}(F(g))$ y $\mathsf{Coker}(F(f))$ por los que, aplicando las propiedades universales del núcleo y el conúcleo, existen morfismos α y β tales que $F(\mathsf{Ker}(g)) = F(\mathsf{Ker}(g))\alpha$ y $F(\mathsf{Coker}(f)) = \beta F(\mathsf{Coker}(f))$ ya que la sucesión imagen es exacta. Entonces, tenemos que $\beta\mathsf{Coker}(F(f))\mathsf{Ker}(F(g))\alpha = 0 = F(\mathsf{Ker}(g)\mathsf{Coker}(f))$ y, como el funtor es fiel, $\mathsf{Coker}(f)\mathsf{Ker}(g) = 0$, que es una contradicción. Por tanto, la sucesión imagen no es exacta □

Uniendo lo visto en la Proposición 1.1.10 y en la proposición anterior, tenemos que si $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ es un funtor covariante fiel y exacto, entonces la conmutatividad y la exactitud de los diagramas en $\mathscr{C}$ es equivalente a la de sus imágenes en $\mathscr{D}$.

Sabemos por el Apartado 3 del Ejemplo 2.2.8 que el funtor Hom covariante en un objeto T de una categoría abeliana se puede ver como un funtor en $\mathbf{Mod}_{\mathrm{End}}(T)$ y por tanto es un funtor entre categorías abelianas. Vamos a probar que es exacto a izquierda. Este ejemplo será necesario más adelante.

Ejemplo 3.1.6. Si $\mathscr{C}$ es una categoría abeliana y T es un objeto, el funtor covariante

$$\operatorname{Hom}(T,-) : \mathscr{C} \longrightarrow \mathbf{Mod}_{\mathrm{End(T)}}$$

es exacto a izquierda.
Sea $\mathbf{0} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \mathbf{0}$ sucesión exacta corta. Veamos que la imagen es exacta a izquierda. Tenemos que ver que $\mathsf{Ker}\left(\mathrm{h}^T(f)\right) = 0$ y que $\mathsf{Ker}\left(\mathrm{h}^T(g)\right) = \mathsf{Im}\left(\mathrm{h}^T(f)\right)$.
Si $h : T \longrightarrow A$ tal que $\mathrm{h}^T(f)(h) = 0$, entonces $fh = 0$ y como f es monomorfismo, $h = 0$ con lo que $\mathsf{Ker}\left(\mathrm{h}^T(f)\right) = 0$. Si $h : T \longrightarrow B$ tal que $\mathrm{h}^T(g)(h) = 0$, entonces $gh = 0$, pero también $gf = 0$. Aplicando la propiedad universal del núcleo, existe un único $\varphi : T \longrightarrow A$ tal que $h = f\varphi$, pero entonces $h = \mathrm{h}^T(f)(\varphi) \in \mathsf{Im}\,\mathrm{h}^T(f)$. Si $h \in \mathsf{Im}\,h^T(f)$, entonces existe α tal que $h = f\alpha$. Componiendo con g, $gh = gf\alpha = g\mathrm{h}^T(f)(\alpha) = \mathrm{h}^T(gf)(\alpha) = 0$ y $h \in \mathsf{Ker}\,\mathrm{h}^T(g)$.

De la misma manera se prueba que el funtor $\operatorname{Hom}(T,-) : \mathscr{C} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ es exacto a izquierda para todo objeto T de la categoría abeliana $\mathscr{C}$.

3.2. Objetos proyectivos y generadores

Definimos ahora los objetos proyectivos en una categoría cualquiera que generalizan los módulos proyectivos en las categorías de módulos.

Definición 3.2.1. Decimos que un objeto P en una categoría es **proyectivo** si dado un epimorfismo $f : A \longrightarrow B$, todo morfismo $g : P \longrightarrow B$ se levanta a un morfismo $h : P \longrightarrow A$, es decir, existe un tal morfismo h de manera que el diagrama

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "f"] \\ P \arrow[ur, dotted, "h"] \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

conmuta, $g = fh$.

Observamos que la propiedad que define los proyectivos no es una propiedad universal porque el morfismo h no es necesariamente único.

Vemos ahora ejemplos de proyectivos en **Set** y ${}_R\mathbf{Mod}$. En el primero de los ejemplos tenemos ocasión de dar una equivalencia del axioma de elección en términos categóricos que hemos encontrado sin demostración en [10].

Ejemplo 3.2.2.

1. El axioma de elección es equivalente a que todo conjunto es proyectivo como objeto de **Set**.
   $\Longrightarrow$
   Sabemos que en **Set** los epimorfismos son las aplicaciones sobreyectivas. Sea $f : A \longrightarrow B$ aplicación sobreyectiva y $g : X \longrightarrow B$ una aplicación cualquiera. Podemos considerar la familia de conjuntos
   $$\left\{f^{-1}(g(x)) : x \in X\right\} \subseteq \mathcal{P}(A).$$
   Por el axioma de elección, existe una función de elección, es decir, una aplicación $h : X \longrightarrow A$ tal que $h(x) \in f^{-1}(g(x))$. Con esto tenemos que $f(h(x)) = g(x)$ para todo $x \in X$ y, entonces, $g = fh$ y X es proyectivo.
   $\Longleftarrow$

Sea una familia no vacía de conjuntos no vacíos $\{X_i\}_{i\in I}$ donde podemos suponer que los conjuntos son disjuntos dos a dos. Consideramos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} f: & \bigcup_{i\in I} X_i & \longrightarrow & I \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

donde $f(x)$ es el único elemento de I tal que $x \in X_{f(x)}$. Está bien definida porque los conjuntos son disjuntos dos a dos y es claramente sobreyectiva. Consideramos también la aplicación identidad $1_I : I \longrightarrow I$. Como todo conjunto es proyectivo, I es proyectivo y existe una aplicación $h : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} X_i$ tal que $fh = 1_I$, es decir, $f(h(i)) = 1_I(i) = i$ para todo $i \in I$. Esto quiere decir, por la definición de f, que $h(i) \in X_i$ para todo $i \in I$ con lo que se cumple el axioma de elección.

2. Todo anillo R es proyectivo como R-módulo en ${}_R\mathbf{Mod}$.
Sean $f : M \longrightarrow N$ un epimorfismo y $g : R \longrightarrow N$ un morfismo de R-módulos. Repitiendo lo anterior, consideramos la familia de conjuntos no vacíos

$$\left\{f^{-1}(g(r)) : r \in R\right\} \subseteq \mathcal{P}(M).$$

Por el axioma de elección, existe una aplicación $h : R \longrightarrow M$ tal que $h(r) \in f^{-1}(g(r))$ para todo $r \in R$. Se cumple que $fh = g$ como aplicaciones. Si probamos que h es un morfismo de R-módulos, lo tenemos. Sean $r, s, t \in R$, se cumplen:

- $h(r + s) = h(r) + h(s)$
  Se cumple $f(h(r + s)) = g(r + s) = g(r) + g(s) = f(h(r)) + f(h(s)) = f(h(r) + h(s))$, pero como h es aplicación, debe ser $h(r + s) = h(r) + h(s)$ por unicidad.
- $h(rs) = rh(s)$
  Se cumple $f(h(rs)) = g(rs) = rg(s) = rf(h(s)) = f(rh(s))$ y de nuevo, como h es aplicación, $h(rs) = rh(s)$.

h es morfismo tal que $fh = g$ y R es un proyectivo en ${}_R\mathbf{Mod}$.
De la misma manera, R es proyectivo como R-módulo derecho en $\mathbf{Mod}_R$.

El siguiente resultado es muy importante porque permite caracterizar los objetos proyectivos en una categoría abeliana como aquellos objetos en los que el funtor Hom es exacto. Así se relaciona una propiedad de funtores como ser exacto con una de objetos como ser proyectivo.

De cara al teorema de Mitchell estaremos interesados en encontrar un objeto proyectivo porque sabemos que nos determinará un funtor exacto.

Proposición 3.2.3. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría abeliana y P un objeto. Son equivalentes:*

1. $\mathrm{Hom}(P, -)$ *es exacto*
2. $\mathrm{Hom}(P, -)$ *es exacto a derecha*
3. $\mathrm{Hom}(P, -)$ *manda epimorfismos en epimorfismos.*
4. *P es proyectivo.*

Demostración. $1 \Longleftrightarrow 2 \Longleftrightarrow 3$
Tomamos una sucesión exacta cualquiera donde en particular estamos tomando un epimorfismo g cualquiera

$$\mathbf{0} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \mathbf{0} .$$

Probar que

$$\mathrm{Hom}(P, A) \xrightarrow{\mathrm{h}^P(f)} \mathrm{Hom}(P, B) \xrightarrow{\mathrm{h}^P(g)} \mathrm{Hom}(P, C) \longrightarrow 0$$

es exacta es equivalente a probar que $\mathrm{Hom}\,(P,-)$ es exacto porque sabemos que siempre es exacto a izquierda.
Por la misma razón, por ser exacto a izquierda, ya sabemos que $\mathsf{Im}\left(\mathrm{h}^P\,(f)\right) = \mathsf{Ker}\left(\mathrm{h}^P\,(g)\right)$ y solo falta ver que $\mathrm{h}^P(g)$ es epimorfismo.
$3 \iff 4$
Vamos a probar que P es proyectivo por la definición. Suponemos que $f : A \longrightarrow B$ es un epimorfismo y $g : P \longrightarrow B$ es un morfismo cualquiera. Por hipótesis, $\mathrm{h}^P\,(f) : \mathrm{Hom}(P, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}(P, B)$ es epimorfismo en **Ab** y la aplicación subyacente entre conjuntos es sobreyectiva. Por tanto, existe un morfismo $\alpha : P \longrightarrow B$ tal que $g = \mathrm{h}^P\,(f)\,(\alpha) = f\alpha$ y P es proyectivo.
El recíproco es inmediato, si por ser P proyectivo se tiene que para todo $g : P \longrightarrow B$, existe un morfismo $\alpha : P \longrightarrow A$ tal que $g = f\alpha$, entonces $g = \mathrm{h}^P\,(f)\,(\alpha)$ y la aplicación subyacente es sobreyectiva con lo que el morfismo de grupos abelianos es epimorfismo. $\square$

Necesitamos probar el siguiente resultado que dice que el coproducto de objetos proyectivos es proyectivo.

Proposición 3.2.4. *Sea $\{P_i\}_{i\in I}$ es una familia de proyectivos en una categoría abeliana. Si existe el coproducto $\coprod_{i\in I} P_i$, entonces es proyectivo.*

Demostración. Suponemos $f : A \longrightarrow B$ un epimorfismo y $g : \coprod_{i\in I} P_i \longrightarrow B$. Vamos a ver que existe un morfismo $h : \coprod_{i\in I} P_i \longrightarrow B$ tal que $g = fh$. Dado $i \in I$, tenemos un morfismo composición con la inclusión $g\iota_i : P_i \longrightarrow \coprod_{i\in I} P_i \longrightarrow B$. Pero, como P_i es proyectivo, existe un morfismo $h_i : P_i \longrightarrow A$ que levanta $f\iota_i$, con lo que $f\iota_i = gh_i$. Considerando la familia de morfismos $\{h_i : P_i \longrightarrow A\}_{i\in I}$, aplicamos la propiedad universal del coproducto por la que existe un único morfismo $h : \coprod_{i\in I} P_i \longrightarrow A$ tal que para cada $i \in I$, $h_i = h\iota_i$.

$$\begin{tikzcd}
 & & A \arrow[d, "f"] \\
P_i \arrow[r, "\iota_i"'] \arrow[urr, dotted, bend left, "h_i"] & \coprod_{i\in I} P_i \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dotted, "!h"] & B
\end{tikzcd}$$

Tenemos entonces $g\iota_i = fh_i = fh\iota_i$ para todo $i \in I$.
Observamos que, por la propiedad universal del conúcleo, g es el único morfismo tal que $g\iota_i = fh_i$ para todo $i \in I$. Por tanto, como fh también lo cumple, necesariamente $g = fh$ como queríamos probar. $\square$

Definimos ahora un nuevo tipo de objeto en una categoría cualquiera que, en cierto sentido, permite distinguir morfismos.

Definición 3.2.5. Un objeto G en una categoría es un **generador** si para cada par de morfismos distintos $f, g : A \longrightarrow B$, existe un morfismo $h : G \longrightarrow A$ tal que $fh \neq gh$.
Si un objeto en una categoría es generador y proyectivo, decimos que es un **generador proyectivo**.

Ponemos ejemplos en las categorías **Set**, **Top** y ${}_R$**Mod**. El último de los ejemplos lo utilizaremos más adelante.

Ejemplo 3.2.6.

1. Todo conjunto de un elemento es generador en **Set**.

   Sea $\{x\}$ un conjunto con un único elemento x. Si $f, g : A \longrightarrow B$ son aplicaciones distintas, existe $a \in A$ tal que $f(a) \neq g(a)$. Definimos $h : \{x\} \longrightarrow A$ tal que $h(x) = a$. Tenemos que $\alpha h \neq \beta h$ ya que $\alpha(h(x)) = \alpha(a) \neq \beta(a) = \beta(h(x))$.

2. Todo espacio topológico con un solo elemento es generador en **Top**

   Observamos que dado un conjunto de un elemento $\{x\}$, existe una única topología sobre él $\{\varnothing, \{x\}\}$. Si $f, g : (A, \tau) \longrightarrow (B, \tau')$ son aplicaciones continuas entre espacios topológicos distintas, existe $a \in A$ tal que $f(a) \neq g(a)$. Definimos $h : (\{x\}, \{\varnothing, \{x\}\}) \longrightarrow (A, \tau)$ dada por $h(x) = a$ que es continua porque si $U \subseteq A$, entonces $h^{-1}(U) = \{x\}$ si $a \in U$ o $h^{-1}(U) = \varnothing$ si $a \notin U$. Y h cumple, $\alpha(h(x)) = \alpha(a) \neq \beta(a) = \beta(h(x))$ con lo que $\alpha h \neq \beta h$.

3. Todo anillo R es generador como R-módulo en ${}_R\mathbf{Mod}$.
   Sean $\alpha, \beta : M \longrightarrow N$ morfismos de R-módulos distintos. Existe $m \in M$ tal que $\alpha(m) \neq \beta(m)$.
   Definimos el morfismo
   $$\begin{array}{rccc} h: & R & \longrightarrow & M \\ & r & \longmapsto & rm \end{array}.$$
   Tenemos que $\alpha h \neq \beta h$ porque
   $$\alpha(h(1)) = \alpha(m) \neq \beta(m) = \beta(h(1)).$$
   Por tanto, R es generador.
   Tenemos que R es generador como R-modulo derecho en $\mathbf{Mod}_R$ considerando el morfismo $h : R \longrightarrow M$ tal que $h(m) = mr$ para todo $m \in M$.

Destacamos que hemos probado que todo anillo R es un generador proyectivo como R-módulo derecho en la categoría $\mathbf{Mod}_R$ que será crucial para demostrar el teorema débil de Mitchell.

El funtor que queremos construir en el teorema debe ser fiel. Vamos a ver que, al igual que los proyectivos nos dan exactitud en el funtor Hom, los generadores nos aseguran que es fiel.

Proposición 3.2.7. *Un objeto G en una categoría $\mathscr{C}$ es un generador si y solo si el funtor* $\mathrm{Hom}(G, -) : \mathscr{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$ *es fiel.*

Demostración.
$\Longrightarrow$ Suponemos que G es un objeto generador y sean $f, g : A \longrightarrow B$ tales que $\mathrm{h}_G(f) = \mathrm{h}_G(g)$. Tenemos que probar que $f = g$.
Para todo $h : G \longrightarrow A$, se cumple que $\mathrm{h}_G(f)(h) = \mathrm{h}_G(g)(h) \longleftrightarrow fh = gh$. Como G es generador, debe ser $f = g$ y $\mathrm{Hom}(G, -)$ es fiel.
$\Longleftarrow$ Suponemos que $\mathrm{Hom}(G, -) : \mathscr{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$ es un funtor fiel y $f, g : A \longrightarrow B$ morfismos distintos. Por fidelidad, $\mathrm{h}_G(f) \neq \mathrm{h}_G(g)$ con lo que existe un morfismo $h : G \longrightarrow A$ tal que se cumple $fh = \mathrm{h}_G(f)(h) \neq \mathrm{h}_G(g)(h) = gh$ y G es generador. $\square$

Con esta proposición justificamos la necesidad de tener un objeto que sea tanto generador como proyectivo que nos dará un funtor fiel y exacto.

Buscamos una caracterización de los objetos proyectivos en una categoría abeliana que sean también generadores. Para ello, necesitamos este resultado previo.

Proposición 3.2.8. *Un objeto G en una categoría abeliana es generador si y solo si para todo morfismo $\alpha : A \longrightarrow B$ con $\alpha \neq 0$, existe un morfismo $h : G \longrightarrow A$ tal que $\alpha h \neq 0$.*

Demostración.
$\Longrightarrow$ Es claro por la definición de generador ya que si $\alpha : A \longrightarrow B$ no es el morfismo cero, entonces existe $h : G \longrightarrow A$ tal que $\alpha h \neq 0h = 0$.
$\Longleftarrow$ Suponemos ahora que para todo $\alpha : A \longrightarrow B$ con $\alpha \neq 0$ se cumple que existe $h : G \longrightarrow A$ tal que $\alpha h \neq 0$.
Veamos que G es necesariamente generador. Sean $f, g : A \longrightarrow B$ morfismos distintos. Como la categoría es abeliana, podemos considerar el morfismo $f - g \neq 0$. Por hipótesis, existe un morfismo $h : G \longrightarrow A$ tal que $(f - g)h \neq 0$ con lo que $fh \neq gh$ y G es generador. $\square$

Aplicando la proposición anterior, probamos un resultado que caracteriza qué objetos proyectivos en una categoría abeliana son generadores.

Proposición 3.2.9. *Si un objeto P en una categoría abeliana $\mathscr{C}$ es generador, entonces para todo objeto $A \neq \mathbf{0}$, se tiene $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(P, A) \neq \mathbf{0}$. Si además P es proyectivo, se cumple también el recíproco.*

Demostración. Probamos la primera afirmación. Suponemos que P es generador y tomamos un objeto $A \neq 0$. Tenemos que probar que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(P, A)$ no es el grupo trivial.
Veamos primero que la identidad 1_A no es el morfismo cero 0_A. Como $A \neq \mathbf{0}$, A no es inicial. Necesariamente por la definición de objeto inicial, se tiene que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B) = \varnothing$ o $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B) \neq \mathbf{0}$. Pero como la categoría es abeliana, $0 \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B) \neq \varnothing$ con lo que existe $f : A \longrightarrow B$ tal que $f \neq 0$. Componiendo con la identidad tenemos $f1_A = f \neq 0$ y entonces $1_A \neq 0$.
Ahora, como P es generador y $1_A \neq 0$ podemos aplicar la proposición anterior por la que existe un morfismo $g : P \longrightarrow A$ tal que $1_A g = g \neq 0$ con lo que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(P, A)$ no es el grupo trivial.
Probamos ahora la segunda afirmación suponiendo que P es un objeto proyectivo y que para todo $A \neq \mathbf{0}$ se cumple $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(P, A) \neq \mathbf{0}$. Tenemos que ver que P es generador o, equivalentemente, que el funtor $\mathrm{Hom}(P, -)$ es fiel. Suponemos que existen $f, g : A \longrightarrow B$ tales que $f \neq g$ y veamos que $\mathrm{h}^P(f) \neq \mathrm{h}^P(g)$, esto es, existe $\alpha : P \longrightarrow A$ tal que $\mathrm{h}^P(f)(\alpha) \neq \mathrm{h}^P(g)(\alpha)$

$$\mathrm{h}^P(f)(\alpha) \neq \mathrm{h}^P(g)(\alpha) \longleftrightarrow f\alpha \neq g\alpha \longleftrightarrow (f - g)\alpha \neq 0 \longleftrightarrow \mathrm{h}^P(f - g)(\alpha) \neq 0$$

Vamos a ver entonces que $\mathrm{h}^P(f - g) \neq 0$. Como $f \neq g$, tenemos que $\mathsf{Im}(f - g) \neq 0$. Pero, por hipótesis, $\mathrm{h}^P(\mathsf{Im}(f - g)) \neq 0$. Ahora, como P es proyectivo, $\mathrm{Hom}(P, -)$ es exacto y conserva núcleos y conúcleos con lo que también imágenes y se tiene $\mathrm{h}^P(\mathsf{Im}(f - g)) = \mathsf{Im}(\mathrm{h}^P(f - g)) \neq 0$, por lo tanto $\mathrm{h}^P(f - g) \neq 0$ y, como queríamos probar, P es generador. □

Definimos ahora un tipo de subcategoría, las subcategorías exactas, que forman parte de las hipótesis del teorema débil de Mitchell.

Definición 3.2.10. Decimos que una subcategoría $\mathscr{D}$ de una categoría abeliana $\mathscr{C}$ es una **subcategoría exacta** si es abeliana y el funtor inclusión $i : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{C}$ es exacto.

La interpretación y la importancia de que una subcategoría de una categoría abeliana sea exacta es que los núcleos y los conúcleos y, por tanto también las imágenes y las coimágenes en la subcategoría se construyen igual que en la categoría grande porque el funtor inclusión es esencialmente la identidad y, si se supone exacto, entonces, como vimos en el Teorema 3.1.2 manda núcleos de la subcategoría en núcleos de la categoría grande.

A partir de esta definición observamos que el teorema débil de Mitchell es, efectivamente, una versión débil del teorema de Mitchell porque si para cada categoría abeliana pequeña se cumplen las tesis del teorema, entonces se cumplen también para una subcategoría pequeña y exacta de una categoría abeliana ya que es abeliana por definición.

3.3. Teorema débil de Mitchell

Teorema 3.3.1. ***Teorema débil de Mitchell***. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría abeliana con un generador proyectivo y coproductos pequeños. Para toda subcategoría plena pequeña y exacta $\mathscr{D}$, existe un anillo R, no necesariamente conmutativo, y un funtor covariante $F : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbf{Mod}_R$ plenamente fiel y exacto.*

Demostración. Sea $\mathscr{C}$ una categoría abeliana con un generador proyectivo $\overline{P}$ y coproductos pequeños y sea $\mathscr{D}$ una subcategoría plena pequeña y exacta de $\mathscr{C}$. Consideramos una copia de $\overline{P}$ por cada

$$\alpha \in \bigcup_{A \in |\mathscr{D}|} \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(\overline{P}, A) = I$$

que formalmente indexamos como $\overline{P}_\alpha$.
Como $\mathscr{D}$ es pequeña, $|\mathscr{D}|$ es un conjunto y por la definición de categoría, también I es un conjunto.

Por tanto, por hipótesis, existe el coproducto del conjunto $\{\overline{P}_\alpha\}_{\alpha\in I}$.

$$P = \coprod_{\alpha\in I} \overline{P}_\alpha$$

P es proyectivo por ser coproducto de objetos proyectivos. Veamos que, además, P es generador y que para todo $A \in |\mathscr{C}|$, existe un epimorfismo $p_A : P \longrightarrow A$.
Dado $A \in |\mathscr{C}|$, tenemos que probar que existe un morfismo $p_A : P \longrightarrow A$ con $p_A \neq 0$.
Consideramos el conjunto $\{f_\alpha : \overline{P}_\alpha \longrightarrow A\}_{\alpha\in I}$ donde

$$\begin{cases} f_\alpha = \alpha & \text{si} \quad \alpha \text{ tiene codominio } A \\ f_\alpha = 0 & \text{si} \quad \alpha \text{ no tiene codominio } A \end{cases}.$$

Por la propiedad universal del coproducto, existe un único morfismo $p_A : P \longrightarrow A$ tal que para todo $\alpha \in I$ se tiene $p_A = \alpha\iota_\alpha$. Como $\overline{P}$ es un generador proyectivo, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\overline{P}, A) \neq \mathbf{0}$ y existe un morfismo $\gamma : \overline{P} \longrightarrow A$ con $\gamma \neq 0$. Como se tiene $\gamma = p_A\iota_\gamma$ y $\gamma \neq 0$ debe ser $p_A \neq 0$ con lo que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(P, A) \neq \mathbf{0}$ y P es también generador.
Veamos que p_A es epimorfismo. Suponemos que existen $r, s : A \longrightarrow B$ morfismos tales que $rp_A = sp_A$. Vamos a probar que $r = s$ usando que $\mathrm{Hom}(\overline{P}, -)$ es fiel. Sea $h : \overline{P} \longrightarrow A$ cualquiera. Se tiene que

$$rp_A = sp_A \longrightarrow rp_A\iota_h = sp_A\iota_h \longrightarrow rh = sh \longrightarrow \mathrm{h}^{\overline{P}}(r)(h) = \mathrm{h}^{\overline{P}}(s)(h).$$

Por tanto, $\mathrm{h}^{\overline{P}}(r) = \mathrm{h}^{\overline{P}}(s)$ y necesariamente $r = s$ con lo que p_A es epimorfismo.
Ahora, sabemos por 1 y 3 del Ejemplo 2.2.8 que $R = \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(P, P)$ es un anillo no necesariamente conmutativo con la suma y la composición de morfismos y que para todo $A \in |\mathscr{D}|$, el grupo $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(P, A)$ tiene estructura de R-módulo derecho dada por la composición a derecha.
Consideramos el funtor $\mathrm{Hom}(P, -) : \mathscr{C} \longrightarrow \mathbf{Mod}_R$ que es fiel y exacto por ser P generador proyectivo. Como $\mathscr{D}$ es una subcategoría exacta, el funtor restricción $F = \mathrm{Hom}(P, -)i_{\mathscr{D}}$ es también fiel y exacto.
Veamos que es pleno. Sean $A, B \in |\mathscr{D}|$ y sea $g : F(A) \longrightarrow F(B)$. Tenemos que probar que existe un morfismo $f : A \longrightarrow B$ tal que $F(f) = g$. Consideramos los epimorfismos $p_A : P \longrightarrow B$ y $p_B : P \longrightarrow B$ con los que obtenemos las siguientes sucesiones exactas

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathsf{Ker}\, p_A \longrightarrow P \xrightarrow{p_A} A \longrightarrow \mathbf{0}$$

$$P \xrightarrow{p_B} B \longrightarrow \mathbf{0}.$$

Como F es un funtor exacto, tenemos también las sucesiones exactas

$$\mathbf{0} \longrightarrow F(\mathsf{Ker}\, p_A) \longrightarrow R \xrightarrow{F(p_A)} F(A) \longrightarrow \mathbf{0}$$

$$R \xrightarrow{F(p_B)} F(B) \longrightarrow \mathbf{0}.$$

En particular, $F(p_B)$ es un epimorfismo por serlo p_B. Como R es proyectivo en $\mathbf{Mod}_R$ y $F(p_B)$ es un epimorfismo, existe por definición un endomorfismo $h : R \longrightarrow R$ tal que $gF(p_A) = F(p_B)h$. Tenemos pues el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{0} \arrow[r] & F(\mathsf{Ker}\, p_A) \arrow[r] & R \arrow[r, "F(p_A)"] \arrow[d, "h"'] & F(A) \arrow[r] \arrow[d, "g"] & \mathbf{0} \\
 & & R \arrow[r, "F(p_B)"'] & F(B) \arrow[r] & \mathbf{0}.
\end{tikzcd}$$

Como h es un endomorfismo de R en la categoría de R-módulos derechos, h se corresponde a la acción por un elemento de R, es decir, existe un endomorfismo de anillos $\alpha : P \longrightarrow P$ tal que $h(r) = \alpha \cdot r = r\alpha$ para todo $r \in R$. Obtenemos con esto que $F(\alpha) = h$ por la definición del funtor F. Fijándonos en el diagrama anterior, tenemos que

$$F(p_B\alpha\mathsf{Ker}(p_A)) = F(p_B)F(\alpha)F(\mathsf{Ker}(p_A)) = gF(p_A)F(\mathsf{Ker}(p_A)) = gF(p_A\mathsf{Ker}(p_A)) = gF(0) = g0 = 0.$$

Pero como $F(0) = 0$ y F es un funtor fiel, debe ser $p_B\alpha\mathsf{Ker}(p_A) = 0$.
Consideramos el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathsf{Ker}\, p_A \arrow[r] & P \arrow[r, "p_A"] \arrow[d, "\alpha"'] & A \arrow[r] & 0 \\ & & P \arrow[r, "p_B"] & B \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Como p_A es epimorfismo, es conúcleo de su núcleo $\mathsf{Ker}(p_A)$ con lo que, como $p_B\alpha\mathsf{Ker}(p_A) = 0$, existe un único morfismo $f : A \longrightarrow B$ tal que $fp_A = p_B\alpha$.
Aplicando el funtor F, tenemos

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "F(p_A)"] \arrow[d, "F(\alpha)"'] & F(A) \arrow[d, "F(f)"] \\ R \arrow[r, "F(p_B)"'] & B \end{tikzcd} \quad \text{además del anterior} \quad \begin{tikzcd} R \arrow[r, "F(p_A)"] \arrow[d, "F(\alpha)"'] & F(A) \arrow[d, "g"] \\ R \arrow[r, "F(p_B)"'] & F(B). \end{tikzcd}$$

Se tiene que $gF(p_A) = F(p_B)F(\alpha) = F(f)F(p_A)$. Como $F(p_A)$ es epimorfismo, $F(f) = g$ como queríamos probar. Por tanto, $F : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbf{Mod}_R$ es un funtor plenamente fiel y exacto. □

Ahora vamos a interpretar su utilidad para demostrar teoremas sobre diagramas en cualquier categoría abeliana.

Para ello, vamos a ver como cualquier diagrama formado por un conjunto de objetos en una categoría abeliana se puede ver como el mismo diagrama pero en una subcategoría plena, pequeña y exacta.

Teorema 3.3.2. *Dado un conjunto $\{A_i\}_{i\in I}$ de objetos en una categoría abeliana $\mathscr{C}$, existe una subcategoría plena pequeña y exacta $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{C}$ tal que $A_i \in |\mathscr{D}|$.*

Demostración. Consideramos la subcategoría plena $\mathscr{D}_0 \subseteq \mathscr{C}$ tal que $A_i \in |\mathscr{D}_0|$ para todo $i \in I$. Definimos ahora una sucesión de subcategorías plenas $(\mathscr{D}_n)_n$. Supuesta definida $\mathscr{D}_n$, aplicando el axioma de elección, podemos escoger unos únicos objetos núcleo $\mathsf{Ker}\, f$ y conúcleo $\mathsf{Coker}\, f$ en $\mathscr{C}$ para cada morfismo f en $\mathscr{D}_n$ y un único producto y coproducto $A \bigoplus B$ en $\mathscr{C}$ para cada A, B objetos en $\mathscr{D}_n$. Definimos $\mathscr{D}_{n+1}$ como la subcategoría plena dada por esos objetos. Definamos la subcategoría plena y pequeña $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{C}$ dada por el conjunto de objetos $\bigcup_{n=0}^{\infty} |\mathscr{D}_n|$. Esta categoría es abeliana porque dados dos objetos A, B y un morfismo $f : A \longrightarrow B$, tenemos que $A, B \in |\mathscr{D}_n|$ para algún n, entonces $A \bigoplus B$, $\mathsf{Ker}\, f$, $\mathsf{Coker}\, f$ existen en $|\mathscr{D}_{n+1}|$. Como $\mathscr{D}$ es una subcategoría plena, tenemos los morfismos $\mathsf{Ker}(f)$, $\mathsf{Coker}(f)$ que son núcleo y conúcleo de f en $\mathscr{D}$. El objeto cero de $\mathscr{C}$ está en $\mathscr{D}$ por ser el núcleo de un morfismo identidad. $\mathscr{D}$ es normal y conormal por serlo $\mathscr{C}$.

□

Ahora vamos a justificar cómo estos teoremas permiten transferir resultados sobre diagramas de módulos al contexto general de las categorías abelianas. Para ello, hemos escogido como ejemplo el lema de la serpiente.

Lema 3.3.3. ***Lema de la serpiente.*** *Sea el diagrama conmutativo siguiente en una categoría abeliana cuyas filas se suponen sucesiones exactas*

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r] \arrow[d, "h"] & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' &
\end{tikzcd} .$$

Existe una sucesión exacta $\mathsf{Ker}\, f \longrightarrow \mathsf{Ker}\, g \longrightarrow \mathsf{Ker}\, h \longrightarrow \mathsf{Coker}\, f \longrightarrow \mathsf{Coker}\, g \longrightarrow \mathsf{Coker}\, h$ *de manera que el diagrama siguiente conmuta.*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathsf{Ker}\, f \arrow[r, dotted] \arrow[d] & \mathsf{Ker}\, g \arrow[r, dotted] \arrow[d] & \mathsf{Ker}\, h \arrow[d] \arrow[dddll, dotted] & \\
 & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r] \arrow[d, "h"] & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d] & B' \arrow[r] \arrow[d] & C' \arrow[d] & \\
 & \mathsf{Coker}\, f \arrow[r, dotted] & \mathsf{Coker}\, g \arrow[r, dotted] & \mathsf{Coker}\, h &
\end{tikzcd}$$

Como es un diagrama finito, el conjunto de los objetos del diagrama genera una subcategoría plena, pequeña y exacta de la categoría abeliana por el Teorema 3.3.2. Si suponemos que la categoría tiene un generador proyectivo y coproductos pequeños, entonces, por el teorema débil de Mitchell, existe un funtor plenamente fiel y exacto a una cierta categoría de módulos. Por tanto, tomando imágenes en objetos y morfismos, tenemos el correspondiente diagrama en la categoría de módulos. Sabemos, aplicando la Proposición 1.1.10 y la Proposición 3.1.5, que las propiedades de conmutatividad y exactitud del diagrama son las mismas tanto en la categoría de módulos como en la categoría abeliana original. Además, como el funtor es exacto, se preservan los núcleos, los conúcleos, las imágenes y las coimágenes.

Por tanto, podemos razonar sobre el diagrama como si fuera un diagrama en la categoría de módulos donde los objetos son conjuntos y los morfismos son aplicaciones entre conjuntos. Además, se puede probar que, con estas hipótesis, se pueden construir morfismos en la categoría abeliana a partir de morfismos en la categoría de módulos. Todo esto es lo que se conoce como tomar elementos en los objetos de una categoría abeliana o como *diagram-chasing*.

Como el lema de la serpiente es cierto en todas las categorías de módulos, como se puede ver, por ejemplo, en [14], entonces también es cierto en todas las categorías abelianas con un generador proyectivo y coproductos pequeños. Aplicando la versión fuerte, tenemos que lema de la serpiente es cierto en cualquier categoría abeliana.

No vamos a demostrar la versión general del teorema. Pero, si nos fijamos, vemos que las únicas hipótesis extra son que la categoría tiene un generador proyectivo y que tiene coproductos pequeños.

Una de las demostraciones del teorema de Mitchell sigue este guión: Partimos de una categoría abeliana pequeña $\mathscr{C}$. El embebimiento de Yoneda nos da un funtor contravariante $\mathcal{Y} : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{L}$ plenamente fiel donde $\mathscr{L}$ es una categoría de funtores. Se prueba que $\mathscr{L}$ es abeliana, $\mathcal{Y}$ es exacto y que $\coprod_{A\in|\mathscr{C}^0|} \mathrm{Hom}(A, -)$ existe y es generador. De hecho, es una categoría de Grothendieck que no definimos (véase [5], esta noción se introdujo en [6]). En particular, se prueba que $\mathscr{L}$ tiene un cogenerador inyectivo, que es la noción dual de generador proyectivo. Componiendo con el funtor dualizante, se tiene un funtor covariante $\mathcal{Y}^0 : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{L} \longrightarrow \mathscr{L}^0$ donde $\mathscr{L}^0$ tiene un generador proyectivo. Ahora, por ser $\mathscr{C}$ una categoría pequeña, se puede probar, tomando imágenes en objetos y morfismos, que $\mathcal{Y}^0(\mathscr{C})$ es una subcategoría pequeña de $\mathscr{L}^0$. Aplicando el teorema 3.3.2, $\mathcal{Y}^0(\mathscr{C})$ está contenida en una subcategoría $\mathscr{D}$ plena, pequeña y exacta de $\mathscr{L}^0$ con lo que podemos aplicar el teorema débil de Mitchell y tenemos un funtor covariante $\mathscr{D} \longrightarrow \mathbf{Mod}_R$ plenamente fiel y exacto a una categoría de módulos. Componiendo los funtores, tenemos un funtor covariante $\mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D} \longrightarrow$ $\mathbf{Mod}_R$ plenamente fiel y exacto como buscábamos.

Las demostraciones formales de los metateoremas y del teorema de Mitchell, se pueden consultar, por ejemplo, en [11].

Vamos a desarrollar un ejemplo de un funtor contravariante plenamente fiel de cualquier categoría abeliana pequeña en una categoría de funtores que sí tiene un generador y coproductos pequeños. De hecho, este es un paso en la demostración del teorema general. Para ver que tiene generador, utilizaremos la proposición 3.2.9 con lo que necesitaremos ver que además el generador es proyectivo.

Definición 3.3.4. Un funtor $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ entre categorías abelianas es **aditivo** si conserva la suma, es decir, si para todos $f, g : A \longrightarrow B$ morfismos en $\mathscr{C}$ se tiene $F(f+g) = F(f) + F(g)$.

Ejemplo 3.3.5. Si A es un objeto en una categoría abeliana y $f, g : B \longrightarrow C$ son morfismos en $\mathscr{C}$, entonces $\mathrm{h}^A(f+g)(h) = (f+g)h = fh + gh = \mathrm{h}^A(f)(h) + \mathrm{h}^A(g)(h)$ para todo $h : A \longrightarrow B$ y $\mathrm{Hom}(A, -)$ es aditivo.

En el siguiente teorema vemos cómo dotar de estructura abeliana a ciertas categorías de funtores.

Teorema 3.3.6. *Si $\mathscr{C}$ es una categoría pequeña y $\mathscr{D}$ es una categoría abeliana, la categoría de funtores $\mathsf{Func}(\mathscr{C}, \mathscr{D})$ es abeliana. Si además $\mathscr{C}$ es abeliana, la subcategoría plena de los funtores aditivos $\mathsf{Add}(\mathscr{C}, \mathscr{D})$ también es abeliana.*

Demostración. Vamos a probar que $\mathsf{Func}(\mathscr{C}, \mathscr{D})$ es una categoría abeliana. La idea de la demostración es construir los funtores objeto a objeto aplicando que $\mathscr{D}$ es abeliana y por tanto tiene objeto cero, productos, coproductos, núcleos y conúcleos. Las transformaciones naturales se construirán componente a componente.

Objeto cero. Definimos $\mathbf{0} : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ tal que transforma cada objeto A de $\mathscr{C}$ en el objeto cero $\mathbf{0}(A) = \mathbf{0}$ de $\mathscr{D}$ y cada morfismo $f : A \longrightarrow B$ de $\mathscr{C}$ en el morfismo cero $\mathbf{0}(f) = 0 : \mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{0}$. Tenemos que ver que esto define un funtor covariante . Dado un objeto A en $\mathscr{C}$, $\mathbf{0}(1_A) = 0 = 1_{\mathbf{0}}$ ya que la identidad del objeto cero coincide con el morfismo cero. Dados dos morfismos $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ tenemos $\mathbf{0}(gf) = 0 = \mathbf{0}(g)\mathbf{0}(f)$ $\mathbf{0}$ es un objeto inicial porque dado un funtor $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$, sabemos que para todo A objeto de $\mathscr{C}$, existe un único morfismo $0 : \mathbf{0} \longrightarrow F(A)$ por ser $\mathbf{0}$ objeto cero de $\mathscr{D}$. Esto nos da una transformación natural $0 : \mathbf{0} \longrightarrow F$. Y por definición de objeto cero, no se puede definir ninguna otra transformación natural entre esos dos funtores. Se tiene que $\mathbf{0}$ es objeto final dualizando el argumento anterior con lo que $\mathbf{0}$ es un objeto cero de la categoría $\mathsf{Func}(\mathscr{C}, \mathscr{D})$.

Productos y coproductos. Sean $F, G : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ dos funtores covariantes . Definimos $F \bigoplus G :$ $\mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ de manera que transforma cada objeto A en el grupo abeliano $F(A) \bigoplus G(A)$ y cada morfismo $f : A \longrightarrow B$ en el producto $(F \bigoplus G)(f)$ dado por

$$\begin{pmatrix} F(f) & 0 \\ 0 & G(f) \end{pmatrix} : F(A) \bigoplus G(A) \longrightarrow F(B) \bigoplus G(B).$$

Veamos que $F \bigoplus G$ es un funtor covariante. Dado un objeto A,

$$\left(F \bigoplus G\right)(1_A) = \begin{pmatrix} F(1_A) & 0 \\ 0 & G(1_A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_{F(A)} & 0 \\ 0 & 1_{G(A)} \end{pmatrix} = 1_{F(A) \bigoplus G(A)}.$$

Dados dos morfismos $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$, se cumple que

$$\begin{pmatrix} F(gf) & 0 \\ 0 & G(gf) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(g) & 0 \\ 0 & G(g) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F(f) & 0 \\ 0 & G(f) \end{pmatrix}$$

con lo que se preserva la composición $(F \bigoplus G)(gf) = (F \bigoplus G)(g)\,(F \bigoplus G)(f)$.
Veamos ahora que $F \bigoplus G$ es tanto un producto como un coproducto de F y G en $\mathsf{Func}(\mathscr{C}, \mathscr{D})$.
Definimos $\pi_F : F \bigoplus G \longrightarrow F$ y $\pi_G : F \bigoplus G \longrightarrow G$ donde para cada A objeto de $\mathscr{C}$, el morfismo $(\pi_F)_A : F(A) \bigoplus G(A) \longrightarrow F(A)$ es la correspondiente proyección a $F(A)$ en la categoría $\mathscr{D}$ que

es $(\pi_F)_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$. Análogamente, se define π_G como $(\pi_G)_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ para todo objeto A de $\mathscr{C}$. Tenemos que probar que son transformaciones naturales.
Dado $f : A \longrightarrow B$, se cumple que el diagrama

$$\begin{tikzcd} F(A)\bigoplus G(A) \arrow[r, "(\pi_F)_A"] \arrow[d, "(F\bigoplus G)(f)"'] & F(A) \arrow[d, "F(f)"] \\ F(B)\bigoplus G(B) \arrow[r, "(\pi_F)_B"] & F(B) \end{tikzcd}$$

es conmutativo porque

$$F(f)\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(f) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F(f) & 0 \\ 0 & G(f) \end{pmatrix}.$$

Por tanto, π_F es una transformación natural y de la misma manera lo es π_G. Veamos que cumplen la propiedad universal del producto. Suponemos que existen transformaciones naturales $u_F : H \longrightarrow F$ y $u_G : H \longrightarrow G$. Para cada objeto A de $\mathscr{C}$, tenemos los morfismos $(u_F)_A : H(A) \longrightarrow F(A)$ y $(u_G)_A : H(A) \longrightarrow G(A)$ y por la propiedad universal del producto, existe un único morfismo $\varphi_A : H(A) \longrightarrow F(A)\bigoplus G(A)$ tal que $(u_F)_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\varphi_A$ y $(u_G)_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\varphi_A$. Observamos que en notación matricial

$$\varphi_A = \begin{pmatrix} (u_F)_A \\ (u_G)_A \end{pmatrix}.$$

Esto constituye una transformación natural. Si $f : A \longrightarrow B$ es un morfismo, el diagrama

$$\begin{tikzcd} H(A) \arrow[r, "\varphi_A"] \arrow[d, "H(f)"'] & F(A)\bigoplus G(A) \arrow[d, "(F\bigoplus G)(f)"] \\ H(B) \arrow[r, "\varphi_B"'] & F(B)\bigoplus G(B) \end{tikzcd}$$

conmuta ya que

$$\begin{pmatrix} F(f) & 0 \\ 0 & G(f) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (u_F)_A \\ (u_G)_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(f)(u_F)_A \\ G(f)(u_G)_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (u_F)_B H(f) \\ (u_G)_B H(f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (u_F)_B \\ (u_G)_B \end{pmatrix} H(f)$$

donde la igualdad central se tiene de que u_F y u_G son transformaciones naturales de H en $F\bigoplus G$. Por tanto, $\varphi : H \longrightarrow F\bigoplus G$ es una transformación natural tal que $u_F = \pi_F\varphi$ y $u_G = \pi_G\varphi$ y es única con esta propiedad ya que para cada objeto, es único el morfismo componente que cumple la igualdad. Con esto, tenemos que $F\bigoplus G$ es un producto en $\mathsf{Func}(\mathscr{C}, \mathscr{D})$. La demostración de que es coproducto es análoga.

Núcleos y conúcleos. Sea $\alpha : F \longrightarrow G$ una transformación natural entre los funtores $F, G : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$. Queremos ver que existe un núcleo de α como morfismo de la categoría $\mathsf{Func}(\mathscr{C}, \mathscr{D})$. Definimos $\mathsf{Ker}\,\alpha : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ que transforma cada objeto A en el objeto núcleo $\mathsf{Ker}\,\alpha_A$. Para cada $f : A \longrightarrow B$, existe un único morfismo $\varphi_f : \mathsf{Ker}\,\alpha_A \longrightarrow \mathsf{Ker}\,\alpha_B$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Ker}\,\alpha_A \arrow[r] \arrow[d, dotted, "!\varphi_f"'] & F(A) \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "F(f)"] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ \mathsf{Ker}\,\alpha_B \arrow[r] & F(B) \arrow[r, "\alpha_B"] & G(B) \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

conmuta porque por ser α transformación natural tenemos $G(f)\alpha_A = \alpha_B F(f)$ y entonces

$$\alpha_B F(f)\mathsf{Ker}(\alpha_A) = G(f)\alpha_A\mathsf{Ker}(\alpha_A) = G(f)0 = 0$$

y obtenemos la existencia y unicidad de φ_f por la propiedad universal del núcleo.
Definimos $(\mathsf{Ker}\,\alpha)(f) = \varphi_f$ para cada morfismo f en $\mathscr{C}$. Veamos que $\mathsf{Ker}\,\alpha : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ es un funtor

covariante. Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ dos morfismos, se cumple $(\mathsf{Ker}\,\alpha)\,(1_A) = 1_{\mathsf{Ker}\,\alpha_A}$ porque debe ser el único morfismo tal que $1_{F(A)}\mathsf{Ker}(\alpha_A) = (\mathsf{Ker}\,\alpha)\,(1_A)\mathsf{Ker}(\alpha_A)$. Además, observamos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Ker}\,\alpha_A \arrow[r] \arrow[d, "(\mathsf{Ker}\,\alpha)(f)"] \arrow[dd, bend right=60, "(\mathsf{Ker}\,\alpha)(gf)"'] & F(A) \arrow[d, "F(f)"] \arrow[dd, bend left=60, "F(fg)"] \\
\mathsf{Ker}\,\alpha_B \arrow[r] \arrow[d, "(\mathsf{Ker}\,\alpha)(g)"] & F(B) \arrow[d, "F(g)"] \\
\mathsf{Ker}\,\alpha_C \arrow[r] & F(C)
\end{tikzcd}$$

por la unicidad de la composición y, como $F(gf) = F(g)F(f)$, se tiene

$$(\mathsf{Ker}\,\alpha)(gf) = (\mathsf{Ker}\,\alpha)(g)(\mathsf{Ker}\,\alpha)(f).$$

Definimos ahora $\mathsf{Ker}(\alpha) : \mathsf{Ker}\,\alpha \longrightarrow F$ como $\mathsf{Ker}(\alpha)_A = \mathsf{Ker}(\alpha_A) : \mathsf{Ker}\,\alpha_A \longrightarrow F(A)$ para todo objeto A. Es claramente una transformación natural por la definición del funtor $\mathsf{Ker}\,\alpha$ ya que (3.1) conmuta por construcción para todo $f : A \longrightarrow B$ morfismo.
Vamos a probar que $\mathsf{Ker}(\alpha)$ es el núcleo de α en la categoría.
Se cumple que $\alpha\mathsf{Ker}(\alpha)$ es la transformación natural cero 0 que existe siempre por la existencia de objeto cero y porque para todo objeto A se tiene

$$\alpha_A\mathsf{Ker}(\alpha)_A = \alpha_A\mathsf{Ker}(\alpha_A) = 0$$

con lo que $\alpha\mathsf{Ker}(\alpha) = 0 : \mathsf{Ker}\,\alpha \longrightarrow \mathbf{0} \longrightarrow F$.
Veamos que se cumple la propiedad universal del núcleo. Suponemos que existe una transformación natural $\beta : H \longrightarrow F$ tal que $\alpha\beta = 0$. En particular, para todo objeto A, se tiene $\alpha_A\beta_A = 0$ con lo que por la propiedad universal del núcleo, existe un único morfismo $\varphi_A : H(A) \longrightarrow \mathsf{Ker}\,\alpha_A$ tal que $\beta_A = \mathsf{Ker}(\alpha_A)\varphi_A$. Tenemos que probar que esto nos da una única transformación natural $\varphi : H \longrightarrow \mathsf{Ker}\,\alpha$ tal que $\beta = \mathsf{Ker}(\alpha)\varphi$. Dado un morfismo $f : A \longrightarrow B$, tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
H(A) \arrow[r, "\varphi_A"] \arrow[d, "H(f)"'] \arrow[rr, bend left, "\beta_A"] & \mathsf{Ker}\,\alpha_A \arrow[r] \arrow[d, "(\mathsf{Ker}\,\alpha)(f)"] & F(A) \arrow[d, "F(f)"] \\
H(B) \arrow[r, "\varphi_B"] \arrow[rr, bend right, "\beta_B"'] & \mathsf{Ker}\,\alpha_B \arrow[r] & F(B)
\end{tikzcd}$$

donde tenemos que probar que $(\mathsf{Ker}\,\alpha)(f)\varphi_A = \varphi_B H(f)$. Esto es equivalente a que se de

$$\mathsf{Ker}(\alpha_B)(\mathsf{Ker}\,\alpha)(f)\varphi_A = \mathsf{Ker}(\alpha_B)\varphi_B H(f)$$

ya que $\mathsf{Ker}(\alpha_B)$ es monomorfismo por ser un núcleo. Usando que $\mathsf{Ker}\,\alpha : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ es funtor covariante y que $\beta : H \longrightarrow F$ es transformación natural lo tenemos porque

$$\mathsf{Ker}(\alpha_B)(\mathsf{Ker}\,\alpha)(f)\varphi_A = \mathsf{Ker}(\alpha_B)\varphi_B H(f) \longleftrightarrow F(f)\beta_A = \beta_B H(f).$$

Como antes, la unicidad de la transformación natural está dada por la unicidad de cada uno de sus morfismos componentes. Por tanto, así construido, $\mathsf{Ker}(\alpha)$ es el núcleo de α.
La construcción de los conúcleos es trivial por dualidad.

Normalidad y conormalidad. Para probar que todo monomorfismo es núcleo de su conúcleo, vamos a caracterizar primero los monomorfismos en la categoría.

Afirmamos que, en $\mathsf{Func}(\mathscr{C},\mathscr{D})$, un morfismo $\alpha : F \longrightarrow G$ es un monomorfismo si y solo si el morfismo componente $\alpha_A : F(A) \longrightarrow G(A)$ es monomorfismo en $\mathscr{D}$ para todo objeto A de $\mathscr{C}$.
Claramente, si $\beta,\gamma : H \longrightarrow F$ son tales que $\beta\alpha = \gamma\alpha$, se cumple para todo A objeto de $\mathscr{C}$ que $\alpha_A\beta_A = \alpha_A\gamma_A$ y como α_A es monomorfismo, $\beta_A = \gamma_A$ y entonces $\beta = \gamma$.
Para la otra implicación, consideramos $\alpha : F \longrightarrow G$ monomorfismo y razonamos como en la demostración del Teorema 3.3.2. Sabemos por el Lema 1.3.8 que el núcleo es cero, pero por la construcción de los núcleos y el objeto cero anteriores, tenemos $\mathsf{Ker}(\alpha_A) = 0$ para todo objeto A de $\mathscr{C}$. Como $\mathscr{D}$ es una categoría abeliana, aplicando la Proposición 2.1.7, α_A es monomorfismo.
La normalidad se sigue de lo anterior. Manteniendo las notaciones, α_A es un monomorfismo en una categoría abeliana para todo A objeto de $\mathscr{C}$ por lo que es núcleo de su conúcleo. Por la construcción de los núcleos y conúcleos en la categoría de funtores, α es núcleo de su conúcleo.
La prueba de la conormalidad se obtiene por dualidad.

Suponemos ahora que $\mathscr{C}$ es abeliana y para probar que la subcategoría plena de los funtores aditivos $\mathsf{Add}(\mathscr{C},\mathscr{D})$ es abeliana es suficiente con ver que el funtor cero, los funtores producto y los núcleos y conúcleos son aditivos. El resto de la demostración es a nivel de morfismos con lo que es igual que la anterior.

El objeto cero es aditivo. Si $f, g : A \longrightarrow B$ son morfismos en $\mathscr{C}$, claramente se cumple $\mathbf{0}(f+g) = 0 = 0 + 0 = \mathbf{0}(f) + \mathbf{0}(g)$. Si $F, G : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ son funtores aditivos, entonces

$$\begin{pmatrix} F(f+g) & 0 \\ 0 & G(f+g) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(f) & 0 \\ 0 & G(f) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F(g) & 0 \\ 0 & G(g) \end{pmatrix}$$

con lo que $(F \bigoplus G)(f+g) = (F \bigoplus G)(f) + (F \bigoplus G)(g)$ y el producto es aditivo.

Si $\alpha : F \longrightarrow G$ es una transformación natural entre funtores aditivos, el funtor $\mathsf{Ker}\, f$ es aditivo. Aplicando el funtor a f, g y $f+g$ tenemos que sus imágenes son los únicos morfismos tales que

$$\begin{aligned} g\mathsf{Ker}(\alpha_A) &= \mathsf{Ker}(\alpha_B)(\mathsf{Ker}\,\alpha)(f) \\ f\mathsf{Ker}(\alpha_A) &= \mathsf{Ker}(\alpha_B)(\mathsf{Ker}\,\alpha)(g) \\ (f+g)\mathsf{Ker}(\alpha_A) &= \mathsf{Ker}(\alpha_B)(\mathsf{Ker}\,\alpha)(f+g) \end{aligned}$$

Pero sumando las dos primeras igualdades, tenemos

$$(f+g)\mathsf{Ker}(\alpha_A) = \mathsf{Ker}(\alpha_B)((\mathsf{Ker}\,\alpha)(f) + (\mathsf{Ker}\,\alpha)(g)).$$

Esto junto a la tercera igualdad nos da

$$\mathsf{Ker}(\alpha_B)(\mathsf{Ker}\,\alpha)(f+g) = \mathsf{Ker}(\alpha_B)((\mathsf{Ker}\,\alpha)(f) + (\mathsf{Ker}\,\alpha)(g)).$$

y por la propiedad universal del núcleo, debe ser $(\mathsf{Ker}\,\alpha)(f+g) = (\mathsf{Ker}\,\alpha)(f) + (\mathsf{Ker}\,\alpha)(g)$.
La aditividad del conúcleo se obtiene por dualidad. □

Es fácil comprobar que las categorías del teorema anterior tienen coproductos pequeños ya que dado un conjunto de objetos, podemos construir el coproducto objeto a objeto.

En la siguiente observación vamos a ver cómo es la estructura aditiva de estas categorías de funtores. La idea es la misma que en el teorema anterior, la suma de las transformaciones naturales será la suma componente a componente.

Observación 3.3.7. Sea $\mathscr{C}$ una categoría pequeña y $\mathscr{D}$ una categoría abeliana cualquiera. Si $\alpha, \beta : F \longrightarrow G$ son dos transformaciones naturales, definimos $\alpha + \beta : F \longrightarrow G$ como la suma de los morfismos $(\alpha+\beta)_A = \alpha_A + \beta_A$ para cada objeto A de $\mathscr{C}$. Es una transformación natural porque para todo $f : A \longrightarrow B$ morfismo en $\mathscr{C}$, se cumple

$$G(f)(\alpha_A + \beta_A) = G(f)\alpha_A + G(f)\beta_A = \alpha_B F(f) + \beta_B F(f) = (\alpha_B + \beta_B)F(f)$$

Y, claramente, la composición de transformaciones naturales se distribuye sobre la suma porque lo hace a nivel de morfismos para cada objeto. Por tanto, esta operación define la única estructura aditiva existente en la categoría de funtores $\mathsf{Func}(\mathscr{C},\mathscr{D})$.

En los siguientes resultados vemos cómo se aplica el lema de Yoneda en el caso concreto de que la categoría sea abeliana y cómo nos da el funtor contravariante que buscábamos.

Proposición 3.3.8. *Sea A un objeto en una categoría abeliana $\mathscr{C}$ y sea $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ un funtor covariante. La biyección $\Phi : \mathsf{Nat}(\mathrm{Hom}(A,-),F) \longrightarrow F(A)$ dada por el lema de Yoneda es un isomorfismo de grupos abelianos.*

Demostración. Claramente el dominio y el codominio son grupos abelianos y por el lema de Yoneda, es una biyección. Falta ver que es un morfismo de grupos.
Si $\alpha, \beta : \mathrm{Hom}(A,-) \longrightarrow F$ son transformaciones naturales, entonces

$$\Phi(\alpha+\beta) = (\alpha+\beta)_A(1_A) = (\alpha_A+\beta_A)(1_A) = \alpha_A(1_A)+\beta_A(1_A) = \Phi(\alpha)+\Phi(\beta)$$

□

Para terminar, vemos que la categoría de funtores aditivos tiene un generador proyectivo.

Teorema 3.3.9. *Si $\mathscr{C}$ es una categoría abeliana pequeña, existe un funtor contravariante $\mathcal{Y} : \mathscr{C} \longrightarrow \mathsf{Add}\,(\mathscr{C}, \mathbf{Ab})$ plenamente fiel.*

Demostración. Aplicando el embebimiento de Yoneda, existe un funtor contravariante $\mathcal{Y} : \mathscr{C} \longrightarrow \mathsf{Func}\,(\mathscr{C}, \mathbf{Set})$ plenamente fiel dado por $A \longmapsto \mathrm{Hom}(A,-)$ y

$$f : A \longrightarrow B \longmapsto \mathrm{Hom}(f,-) : \mathrm{Hom}(B,-) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,-)$$

Claramente, podemos considerar $\mathcal{Y}$ como un funtor en $\mathsf{Add}(\mathscr{C}, \mathbf{Ab})$ porque para todo $f : A \longrightarrow B$ la imagen $\mathcal{Y}(f) = \mathrm{Hom}(f,-)$ es una transformación natural entre funtores aditivos. □

Teorema 3.3.10. *Si $\mathscr{C}$ es una categoría abeliana pequeña, el coproducto $\coprod_{A\in|\mathscr{C}|} \mathrm{Hom}(A,-)$ es un generador proyectivo en $\mathsf{Add}(\mathscr{C}, \mathbf{Ab})$.*

Demostración. Si probamos que para cada objeto A de $\mathscr{C}$ el funtor $\mathrm{Hom}(A,-)$ es proyectivo como objeto de $\mathrm{Add}(\mathscr{C}, \mathbf{Ab})$, entonces aplicando la Proposición 3.2.4 tenemos que $\coprod_{A\in|\mathscr{C}|} \mathrm{Hom}(A,-)$ es proyectivo por ser coproducto de proyectivos.
Sea A objeto de $\mathscr{C}$. Veamos equivalentemente por la Proposición 3.2.3 que el funtor Hom covariante en $\mathrm{Hom}(A,-)$ que denotamos $\mathsf{Nat}(\mathrm{Hom}(A,-),-) : \mathsf{Add}(\mathscr{C}, \mathbf{Ab}) \longrightarrow \mathbf{Ab}$ manda epimorfismos en epimorfismos.
Si $\alpha : F \longrightarrow G$ es un epimorfismo, tenemos que ver que la transformación natural $\mathsf{Nat}(\mathrm{Hom}(A,-),\alpha)$ es epimorfismo. Observamos que los isomorfismos de grupos Φ_F y Φ_G dados por el lema de Yoneda hacen el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Nat}(\mathrm{Hom}(A,-),F) \arrow[r, "\Phi_F"] \arrow[d, "\mathsf{Nat}(\mathrm{Hom}(A,-),\alpha)"'] & F(A) \arrow[d, "\alpha_A"] \\
\mathsf{Nat}(\mathrm{Hom}(A,-),G) \arrow[r, "\Phi_G"'] & G(A)
\end{tikzcd}$$

Si $\eta : \mathrm{Hom}(A,-) \longrightarrow F$ es una transformación natural, entonces

$$\Phi_G\left(\mathsf{Nat}\left(\mathrm{Hom}\left(A,-\right),\alpha\right)(\eta)\right) = \Phi_G\left(\alpha\eta\right) = \left(\alpha\eta\right)_A\left(1_A\right) = \alpha_A\left(\eta_A\left(1_A\right)\right) = \alpha_A\left(\Phi_F\left(\eta\right)\right)$$

Como α es epimorfismo, α_A es epimorfismo como vimos en la demostración del Teorema 3.3.6 y como Φ_F, Φ_G son isomorfismos de grupos, necesariamente $\mathsf{Nat}(\mathrm{Hom}(A,-),\alpha)$ es un epimorfismo y el objeto $\coprod_{A\in|\mathscr{C}|} \mathrm{Hom}(A,-)$ es proyectivo. Por la Proposición 3.2.9 basta con probar que si F es un funtor tal que

$$\mathsf{Nat}\left(\coprod_{A\in|\mathscr{C}|} \mathrm{Hom}(A,-), F\right) = \mathbf{0}$$

entonces $F = \mathbf{0}$.
Tenemos el isomorfismo de grupos

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \mathsf{Nat}\left(\coprod_{A\in|\mathscr{C}|} \mathrm{Hom}(A,-), F\right) & \longrightarrow & \coprod_{A\in|\mathscr{C}|} \mathsf{Nat}(\mathrm{Hom}(A,-),F) \\ & \alpha & \longmapsto & (\alpha\iota_A)_{A\in|\mathscr{C}|} \end{array}$$

ya que si $(\beta_A)_{A\in|\mathscr{C}|} \in \coprod_{A\in|\mathscr{C}|} \mathsf{Nat}(\mathrm{Hom}(A,-),F)$, por la propiedad universal del coproducto, existe un único α tal que $\alpha\iota_A = \beta_A$, esto es, tal que $\Psi(\alpha) = (\beta_A)_A$ y Ψ es biyectiva. Además, es claramente un morfismo de grupos porque

$$\Psi(\alpha+\beta) = ((\alpha+\beta)\iota_A)_A = (\alpha\iota_A)_A + (\beta_A\iota_A)_A = \Psi(\alpha) + \Psi(\beta)$$

para cada par de transformaciones naturales $\alpha, \beta : \coprod_{A\in|\mathscr{C}|} \mathrm{Hom}(A,-) \longrightarrow F$.
Tenemos entonces

$$\mathsf{Nat}\left(\coprod_{A\in|\mathscr{C}|} \mathrm{Hom}(A,-), F\right) = \coprod_{A\in|\mathscr{C}|} \mathsf{Nat}(\mathrm{Hom}(A,-),F) = \coprod_{A\in|\mathscr{C}|} F(A)$$

donde la última igualdad es consecuencia directa del lema de Yoneda que nos da isomorfismos de grupos para cada objeto.
Pero $\coprod_{A\in|\mathscr{C}|} F(A) = \mathbf{0}$ si y solo si $F(A) = \mathbf{0}$ para todo objeto A de $\mathscr{C}$ con lo que $F = \mathbf{0}$. $\square$

Bibliografía

[1] Atiyah, M. F., Macdonald I.G. (1969). *Introduction to Commutative Algebra.* Londres: Addison-Wesley Publishing Co.

[2] Buchsbaum, D. A. (1955) Exact categories and duality. *Trans. Amer. Math. Soc*, **80**: 1-34. doi:10.2307/1993003

[3] Cartan, H., Eilenberg S. (1999) *Homological algebra. With an appendix by David A. Buchbaum.* Princeton, Nueva Jersey: Princeton University Press [Reedición del original editado en Princeton en 1956].

[4] Eilenberg, S., Mac Lane, S. (1945). General Theory of Natural Equivalences. *Trans. Amer. Math. Soc*, **78**: 231-294. doi:10.2307/1990284.

[5] Freyd, P.J. (1964). *Abelian Categories, an Introduction to the Theory of Functors.* Nueva York: Harper & Row.

[6] Grothendieck, A. (1957) Sur quelques points d'algèbre homologique. *The Tohoku Mathematical Journal. Second Series*, **9**: 119-221. doi:10.2748/tmj/1178244839.

[7] Mac Lane, S. (1997) The PNAS way back then. *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, **94**: 5983–5985. Recuperado de `https://www.pnas.org/content/pnas/94/12/5983.full.pdf`.

[8] Mac Lane, S. (1998). *Categories for the Working Mathematician. Second Edition.* Nueva York: Springer-Verlag.

[9] Mitchell, B. (1965). *Theory of Categories.* Londres-Nueva York: Academic Press.

[10] nLab. (2017). Projective object. [Versión 10 mayo, 2017]. Última consulta: 13 octubre, 2019. Recuperado de `https://ncatlab.org/nlab/show/projective+object`

[11] Pareigis, B. (1970). *Categories and Functors.* Londres-Nueva York: Academic Press.

[12] Popescu, N. (1973) *Abelian Categories with Applications to Rings and Modules* Londres-Nueva York: Academic Press.

[13] Schubert, H. (1972). *Categories.* Nueva York-Heidelberg: Springer-Verlag.

[14] Solian, A. (1977). *Theory of Modules. (An Introduction to the Theory of Module Categories).* Londres-Nueva York-Sydney: Editura Academiei, Bucharest; Wiley-Interscience [John Wiley & Sons, Ltd.].

[15] The Stacks Project Authors. (2019). *Stacks Project.* Recuperado de: `https://stacks.math.columbia.edu`.

[16] Vakil, R. (2017) *The Rising Sea. Foundations of Algebraic Geometry.* [Versión 18 noviembre, 2017]. Recuperado de: `http://math.stanford.edu/~vakil/216blog/`.